

Необходимое условие оптимальности для идентификации функции активности пользователей социальной сети

М. А. Толстых, Г. В. Аверин
Донецкий государственный университет, г. Донецк
e-mail: physicisto@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена моделированию потоков информации в глобальных социальных сетях. Рассмотрена диффузионная логистическая модель распространения информации в социальной сети в виде одномерного нестационарного параболического уравнения, для которой поставлена задача параметрической идентификации оптимальной функции активности пользователей сети, зависящей от времени. Получено аналитическое выражение градиента целевого функционала для идентификации оптимального значения параметра-функции.

Введение

Модель диффузионной логистики является расширением статических моделей и учитывает как временные, так и структурные характеристики распространения информации в социальных сетях [1]. Её использование позволяет более точно прогнозировать распространение информации и целенаправленно воздействовать на общественное мнение. Идентификация оптимальных параметров модели диффузионной логистики является важным этапом её применения и может быть решена прямым экстремальным подходом. Оптимизация параметров позволяет получить наиболее точный прогноз диффузии информации в социальной сети и использовать его в различных целях, от бизнес-аналитики до обеспечения безопасности общества.

Рассмотрим задачу идентификации оптимального параметра, зависящего от времени, представляющего собой коэффициент активности пользователей социальной сети в модели диффузионной логистики.

Постановка задачи идентификации

Существуют различные подходы к измерению и оценке количества информации [2]. Примем следующую метрику.

Пусть x – это расстояние в графе сети, измеряемое минимальным набором рёбер, по которым может быть передана информация $v(x, t)$ от узла-источника информации в виде, например, репостов какой-либо новости. Считаем, что источник информации находится в узле x_a и в момент времени $t = t_0$ генерирует информацию $v(x_a, t_0)$ в виде одной новости. Количество репостов или их плотность (количество репостов на расстоянии x

отнесённое к общему количеству узлов на этом расстоянии) будет распространяться по сети. В глобальных сетях расстояние x между узлами может становится достаточно большим, чтобы сеть считать сплошной средой. При этом, распространение информации будет подчиняться законам диффузии. Здесь состояние информационных процессов можно моделировать параболическим уравнением [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - uhv = 0, \quad (1)$$
$$x, t \in \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1).$$

Состояние модели $v(x, t) \in L_2(\bar{\Omega})$, где L_2 – евклидово пространство функций с интегрируемым квадратом, $\bar{\Omega}$ – замыкание пространственно-временного множества Ω . В данном уравнении $p(x) \in L_2(x_a, x_b)$ – коэффициент популярности информации, который влияет на степень диффузии информации извне социальной сети. Функция $u(t) \in L_2(S)$, $S = (t_0, t_1)$ – коэффициент активности пользователей, скорость роста информации за счёт пользователей, поделившихся новостью внутри сети. Функция $h(x) \in L_2(x_a, x_b)$ – пропускная способность, т.е. максимально возможное количество поделившихся новостью пользователей на расстоянии x . Все функции $p(x)$, $u(t)$ и $h(x)$ определены на Ω , но зависят только от времени или пространства.

Граничные условия для уравнения (1) заданы на концах отрезка $[x_a, x_b]$ в виде условия первого и второго рода соответственно:

$$v = 1 \text{ на } \Gamma_a = x_a \times (t_0, t_1),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b = x_b \times (t_0, t_1).$$

Информация в источнике x_a всегда равна единице, ибо содержание информации в первом узле ограничивается одной новостью, а x_b – это расстояние на котором поток указанной информации исчезает.

Начальные условия зададим в виде отсутствия обсуждаемой новости в сети в момент t_0 :

$$v = 0 \text{ на } \Gamma_0 = [x_a, x_b] \times t_0.$$

Функция активности пользователей социальной сети $u(t)$ является управлением для уравнения (1). Оптимальное управление $u_*(t)$ можно найти на основании некоторых наблюдений за состоянием информации в области Ω . Отклонение модельного состояния v от экспериментально наблюдаемого v_e в реальной сети можно оценить следующим критерием качества идентификации модели в виде функционала:

$$J(u) = \iint_{\Omega} (v - v_e)^2 dx dt \in E, \quad (2)$$

где E – это евклидово пространство действительных чисел. Наилучшее значение параметра $u = u_*$ модели (1) будет доставлять минимум целевому функционалу $J(u)$. Отметим, что $J(u)$ зависит от u не явно, а через состояние модели (1). Это существенно усложняет решение оптимизационной задачи, поскольку явную зависимость J от u выразить практически невозможно.

Рассматриваемую задачу параметрической идентификации для модели (1) можно сформулировать как экстремальную задачу [3, 4]:

$$u_*(t) = \arg \min_{u \in L_2(S)} J(u), \\ t \in S \subset \Omega.$$

Данную задачу целесообразно решать прямым экстремальным подходом [5,6], который предполагает непосредственную минимизацию целевого функционала (2) на основе его градиента.

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) - b^k \alpha(t) \nabla J(u^k, t), \\ x \in (t_0, t_1), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где k – номер итерации, b^k – шаговый множитель, который выбирался методом золотого сечения, $\alpha(t)$ – параметр регулирования направления спуска [5]. Именно $\alpha(t)$ может обеспечить сходимость $u^k(t)$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_*(t)$ равномерно на S . В противном случае,

если α отсутствует, то для бесконечномерных задач оптимизации (оптимизация в функциональных пространствах) сходимость к оптимуму $u_*(t)$ на S может отсутствовать или потребовать бесконечно много итераций, что, по сути, одно и то же.

Поиск градиента

Для определения градиента необходимо выписать главную линейную часть приращения целевого функционала $J(u)$, которая представляет собой первую вариацию

$$\delta J = \langle \nabla J, \delta u \rangle_{L_2(S)}, \quad (3)$$

где скобки означают скалярное произведение в указанном пространстве. Таким образом нам необходимо проварьировать (линеаризовать) задачу (1), (2) и привести к виду (3).

Модель (1) можно представить в виде следующего дифференциального оператора $\mathbb{D}$, действующего на v :

$$\mathbb{D} \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} - p \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} - uh \cdot.$$

При этом уравнение (1) принимает вид:

$$\mathbb{D}v = 0 \in L_2(\Omega).$$

Сначала линеаризуем целевой функционал:

$$\delta J = \iint_{\Omega} 2(v - v_e) \delta v dx dt = \langle 2(v - v_e), \delta v \rangle_{L_2(\Omega)}, \\ \delta J \in E.$$

Теперь линеаризуем уравнение (1):

$$\delta \mathbb{D} = \mathbb{V} \delta v + \mathbb{U} \delta r \in L_2(\Omega),$$

где оператор

$$\mathbb{V} \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} - p \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} - uh \cdot$$

и оператор

$$\mathbb{U} \cdot = -hv \cdot.$$

Отобразим полученное уравнение в пространство E , где существует δJ . Там две части одной линеаризованной задачи можно будет объединить. Необходимое отображение можно сделать произвольным линейным функционалом (сопряжённая переменная) $\tilde{f} \in L_2(\Omega)$:

$$\langle \tilde{f}, \delta \mathbb{D} \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \tilde{f}, \mathbb{V} \delta v + \mathbb{U} \delta u \rangle_{L_2(\Omega)} \in E.$$

Преобразуем последнее выражение к такому виду чтобы в правой части скалярного произведения были δu и δv , т.е. к виду

$$\langle \mathbb{V}^* \tilde{f}, \delta v \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \mathbb{U}^* \tilde{f}, \delta u \rangle_{L_2(S)} \in E,$$

где звёздочка означает принадлежность оператора сопряжённому пространству.

Первое слагаемое примет вид:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \mathbb{V} \delta v \rangle_{L_2(\Omega)} &= \\ &= \iint_{x_a t_0}^{x_b t_1} \left(\tilde{f} \frac{\partial \delta v}{\partial t} - \tilde{f} p \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - u h \tilde{f} \delta v \right) dx dt \\ &= \\ &= \iint_{x_a t_0}^{x_b t_1} \left(-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - p \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} - u h \tilde{f} \right) \delta v dx dt + \\ &+ \int_{x_a}^{x_b} \tilde{f} \delta v \Big|_{t_0}^{t_1} dx + \int_{t_0}^{t_1} p \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \delta v \Big|_{x_a}^{x_b} dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} p \tilde{f} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \Big|_{x_a}^{x_b} dt = \langle \mathbb{V}^* \tilde{f}, \delta v \rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \langle \bar{\mathbb{V}}^* \tilde{f}, \delta v \rangle_{V^*(\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_a \cup \Gamma_b)} + \\ &+ \langle \bar{\mathbb{V}}^* \tilde{f}, \frac{\partial \delta v}{\partial \tau} \rangle_{V^*(\Gamma_a \cup \Gamma_b)}. \end{aligned}$$

Как мы видим, появились граничные слагаемые при δv и $\frac{\partial \delta v}{\partial \tau}$, которые отмечены соответственно операторами $\bar{\mathbb{V}}^*$ и $\bar{\mathbb{V}}^*$.

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \mathbb{U} \delta u \rangle_{L_2(\Omega)} &= - \iint_{x_a t_0}^{x_b t_1} h v \tilde{f} dt \delta u dx = \\ &= \langle \mathbb{U}^* \tilde{f}, \delta u \rangle_{L_2(S)} \end{aligned}$$

Получаем сопряжённые операторы, действующие на $\tilde{f}$ из Ω :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^* \cdot &= -\frac{\partial \cdot}{\partial t} - p \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2} - u h \cdot, \quad L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \\ \mathbb{U}^* \cdot &= - \int_{x_a}^{x_b} h v \cdot dx, \quad L_2(\Omega) \rightarrow L_2(S). \end{aligned}$$

Теперь можно в E объединить линеаризованные элементы задачи, пока без учёта краевых членов:

$$\delta J = \langle \mathbb{V}^* \tilde{f} + 2(v - v_e), \delta v \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \mathbb{U}^* \tilde{f}, \delta u \rangle_{L_2(S)}.$$

Обратимся к краевым условиям задачи (1). Проварьируем их:

$$\begin{aligned} \delta v &= 0 \text{ на } \Gamma_a, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b, \\ \delta v &= 0 \text{ на } \Gamma_0. \end{aligned}$$

Тогда краевые члены с операторами $\bar{\mathbb{V}}^*$ и $\bar{\mathbb{V}}^*$ примут вид:

$$\int_{x_a}^{x_b} \tilde{f} \delta v \Big|_{t_1} dx + \int_{t_0}^{t_1} p \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \delta v \Big|_{x_b} dt + \int_{t_0}^{t_1} p \tilde{f} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \Big|_{x_a} dt.$$

Зададим $\tilde{f} = f$ такое, чтобы все слагаемые с δv обратились в ноль. Получим сопряжённую задачу:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f u h + 2(v - v_e) = 0, \quad (4)$$

$$x, t \in \Omega,$$

с граничными и терминальным условиями:

$$\begin{aligned} p f &= 0 \text{ на } \Gamma_a, \quad p \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b, \\ f &= 0 \text{ на } \Gamma_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом первая вариация целевого функционала принимает вид:

$$\delta J = \langle \mathbb{U}^* f, \delta u \rangle_{L_2(S)}. \quad (6)$$

Откуда следует, что градиент

$$\nabla J = - \int_{x_a}^{x_b} h v f dx \in L_2(S), \quad (7)$$

который находится через решение f сопряжённой задачи (4), (6).

Необходимое условие оптимальности

Равенство нулю перовой вариации функционала $J(u)$ является необходимым условием оптимальности в задаче управления без ограничений, т.е.,

$$\begin{aligned} \text{если } u &= u_*, \text{ тогда необходимо} \\ \delta J(u) &= 0. \end{aligned}$$

При наличии сопряжённой задачи (4) с краевыми условиями (5) первая вариация δJ принимает вид (6) с градиентом (7), что придаёт условию оптимальности форму классического необходимого условия для экстремальной задачи:

$$\begin{aligned} \text{если } u &= u_*, \text{ тогда необходимо} \\ \|\nabla J\|_{L_2(S)} &= 0. \end{aligned}$$

Сравнив операторы $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$ исходной и сопряжённой задач, мы видим, что обе задачи имеют параболический тип. Особенность сопряжённой задачи заключается в направлении её решения во времени. Здесь время, согласно терминальному условию, является обратным, что согласуется со знаком минус при производной $-\frac{\partial f}{\partial t}$.

Выводы

Для диффузионной модели распространения информации в социальных сетях поставлена задача параметрической идентификации как экстремальная задача для поиска коэффициентов-функций дифференциального уравнения в частных производных параболического типа.

Получено аналитическое выражение градиента целевого функционала для идентификации оптимального значения функции активности пользователей сети. Применение градиентных алгоритмов оптимизации с равномерной функциональной сходимостью обеспечит выполнение необходимого условия оптимальности в виде равенства нулю нормы градиента с требуемой точностью.

Литература

1. Wang H., Wang F., Xu K. Modeling information diffusion in online social networks with partial differential equations. Springer Nature, 2020.
2. Аверин, Г.В. О количественных величинах, характеризующих понятие «информация» // Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета, 2022. – Т. 2. – С. 216
3. Толстых, В.К., Толстых М.А. Необходимое условие оптимальности параметрической идентификации для распределённой модели социальных сетей // Вестник Донецкого национального университета. Серия Г. Технические науки. – 2021. – №3. – С. 63-68.
4. Толстых, М.А. Задача идентификации параметров социальных сетей // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2020». – М.: МАКС Пресс, 2020. (URL: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/data/section_34_19485.htm)
5. Толстых, В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределёнными параметрами. – Донецк: Юго-Восток, 1997.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации. Т. 2. – М.: МЦНМО, 2011.

Толстых М. А., Аверин Г. В. Необходимое условие оптимальности для идентификации функции активности пользователей социальной сети. Работа посвящена моделированию потоков информации в глобальных социальных сетях. Рассмотрена диффузионная логистическая модель распространения информации в социальной сети в виде одномерного нестационарного параболического уравнения, для которой поставлена задача параметрической идентификации оптимальной функции активности пользователей сети, зависящей от времени. Получено аналитическое выражение градиента целевого функционала для идентификации оптимального значения параметра-функции.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, математическая модель, социальные сети.

Tolstykh M. A., Averin G. V. A necessary optimality condition for identifying the activity function of social network users. The work is devoted to modeling information flows in global social networks. A diffusion logistic model of information dissemination in a social network in the form of a one-dimensional unsteady parabolic equation is considered, for which the task of parametric identification of the optimal function of the activity of network users depending on time is set. An analytical expression of the gradient of the target functional is obtained to identify the optimal value of the parameter-function.

Key words: parametric identification, mathematical model, social networks.

Статья поступила в редакцию 24.04.2023
Рекомендована к публикации профессором Павлышом В.Н.