

Теория обобщенных функций и их применение на практике

Ю. Н. Добровольский

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
dyn_don_20.14@mail.ru

Аннотация

Рассмотрены основные этапы развития теории обобщенных функций. Введено пространство D – бесконечно дифференцируемых, финитных функций на всей числовой прямой. На пространстве D определили линейный непрерывный функционал и назвали его обобщенной функцией. Ввели понятие слабой сходимости последовательностей функционалов. Обобщенные функции разделили на два класса: регулярные и сингулярные. Изучили основные свойства обобщенных функций. Привели обобщенное решение простейших дифференциальных уравнений.

Введение

Теория обобщенных функций – область функционального анализа, которая возникла и развивалась в связи с потребностями современной математической физики и позволила правильно поставить и решить ряд теоретических и прикладных задач. Если возникает необходимость серьезно заниматься исследованием математических моделей физических явлений, то обязательно потребуются изучить основной язык современной математической физики – теорию обобщенных функций.

Необходимость во введении понятий, называемых обобщенными функциями, возникла при попытке дать строгое описание сосредоточенных объектов, которые являются удобными физическими идеализациями. С другой стороны, обобщенные функции позволяют также с единой точки зрения рассматривать производные гладких и разрывных функций, преобразование Фурье убывающих и растущих функций и др., то есть в них имеется и чисто математическая потребность.

Дифференциальное исчисление и теория дифференциальных уравнений базируются на понятии производной, которая первоначально вводится в классическом смысле. Например, любая монотонно неубывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва первого рода, в которых функция заведомо не дифференцируема в классическом смысле.

В физике и разделах математики: в дифференциальных уравнениях и теории вероятностей возникает потребность расширить понятие производной, вводя обобщенную производную, с помощью которой функция, имеющая разрывы первого рода, становится дифференцируемой в точках разрыва. Как результат дифференцирования в обобщенном

смысле разрывных функций возникают обобщенные функции.

Важный вклад в формирование нового математического подхода понятию функции в физике принадлежит Н. М. Гюнтеру, который предлагал рассматривать вместо точечных характеристик типа плотности соответствующие функции множеств еще в 1916 году и пытался переосмыслить на этой основе понятие решения уравнения математической физики.

Актуальность данной темы заключается в том, что обобщенные функции необходимо рассматривать и изучать для решения ряда задач физики и математики. Обобщенные функции позволяют правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения.

Тема исследования: Обобщенные функции и действия над ними.

Объект исследования: обобщенные функции.

Предмет исследования: развитие теории обобщенных функций.

Цель исследования: дать теоретическое обоснование понятия «обобщенная функция» и рассмотреть основные действия, применяемые к ним.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть обобщенные функции как линейные функционалы.
2. Изучить действия над обобщенными функциями.
3. Рассмотреть пространство обобщенных функций.
4. Привести примеры обобщенных функций.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования:

- обобщение изученных ранее данных;
- анализ научно-методической литературы;
- систематизация информации.

Научная новизна: Существуют многие физические модели, которые в терминах обычных функций не могут быть описаны.

Например, задача Коши для уравнения теплопроводности. Мы не можем их описать при помощи обычных функций. Для этого и необходимы обобщенные функции.

Практическое значение: материал, рассмотренный в данной статье, может быть использован для решения задач современной математической физики.

Структура исследования: работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованной литературы.

1. История возникновения теории обобщенных функций

Функция в своём развитии прошла следующие этапы:

1. Установление отдельных зависимостей между величинами (6-5 вв. до н.э. - 13 в.);

2. Выделение идеи функциональной зависимости, а именно осознание понятий «зависимая» и «независимая» переменная величина и её выражение в механической и геометрических формах (14 -16 вв.);

3. Доминирование идеи задания функции аналитической формулой и её логический анализ (конец 16 – 18 вв.);

4. Современный этап становления понятия функции (19 -21 вв.): его обобщение, расширение и исследование.

Современное определение функции можно применять не только к величинам и числам, но и к другим математическим объектам, например, геометрическим фигурам.

Однако математический анализ XIX века ограничивался исследованием только числовых функций, то есть таких, область определения и множество значений которых - числовые множества. Таким образом, математический анализ XIX века продолжал основываться на определении Дирихле.

Но уже в начале XX века возникла необходимость дальнейшего расширения понятия функции, вызванная потребностями физики. Особенно острой она стала после издания в 1930 г. монографии «*Основы квантовой механики*», которую написал английский физик **Поль Адриен Морис Дирак** (1902–1984).

П. Дирак ввёл понятие так называемой «*дельта-функции*», которая выходила далеко за пределы классического определения функции.

По определению П. Дирака, дельта-функция – это функция $y = \delta(x)$, равная нулю при всех x , кроме $x = 0$, где дельта-функция превращается в бесконечность, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

В связи с этим в 30–40 гг. XX в. советский математик **Николай Максимович Гюнтер**

(1871–1941) и другие учёные издали труды, в которых рассматривали не «*функции точки*», а «*функции области*», что лучше соответствовало физической сущности квантово-механических явлений.

Дальнейшие научные исследования привели к понятию «обобщённой функции», которое охватывает и *дельта-функцию*. Основной вклад в разработку теории обобщённых функций внесли французский математик **Лоран Шварц** (1915–2002) и выдающийся советский математик **Сергей Львович Соболев** (1908–1989).

Свою теорию обобщённых функций С.Л. Соболев предложил в 1935 г. Через 10 лет к аналогичной идее независимо пришёл и Л. Шварц, который связал вместе все предыдущие подходы и предложил удобный формализм, основанный на теории топологических векторных пространств.

Л.Шварц построил теорию преобразований Фурье обобщённых функций, которой у С.Л. Соболева не было. Однако считается, что именно С.Л. Соболев является первооткрывателем обобщённых функций.

Следует отметить, что важный вклад в развитие теории обобщённых функций внесли советские математики **Израиль Моисеевич Гельфанд** (1913–2009) и **Георгий Евгеньевич Шиллов** (в начале научной карьеры известный как **Юрий Боссе**; 1917–1975) и другие.

Итак, понятие функции продолжает развиваться и расширяться в соответствии с потребностями развития математической науки и её практических применений.

2. Математические основы теории обобщенных функций

2.1. Понятие обобщенной функции. Пространство обобщенных функций.

Рассмотрим множество всевозможных функций, определенных на всей числовой прямой R и обладающие следующими двумя свойствами:

1) Каждая $\varphi(x) \in C^{\infty}(R)$ - к классу

бесконечно дифференцируемых на всей прямой, т.е. имеет производные всех порядков во всех точках.

2) Каждая $\varphi(x)$ – финитная, т.е. для каждой функции существует интервал $(-a; a)$ вне которого функция равна нулю: $\varphi(x)=0$ вне $(-a; a)$.

Обозначим $X_{\varphi} = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$, $\overline{X_{\varphi}}$ -

замыкание X_{φ} . Замыкание – это объединение множества X_{φ} и всех его предельных точек.

Множество $\overline{X_{\varphi}}$ называется носителем функции

$\varphi(x)$. Обозначение $\overline{X}\varphi = \text{Supp}\varphi(x)$ (от французского Support).

Это множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций определенных на всей числовой прямой назовем множеством основных функций. Обозначим D.

Пример.

$$w_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{если } |x| < a, a > 0. \\ 0, & \text{если } |x| \geq a \end{cases}$$

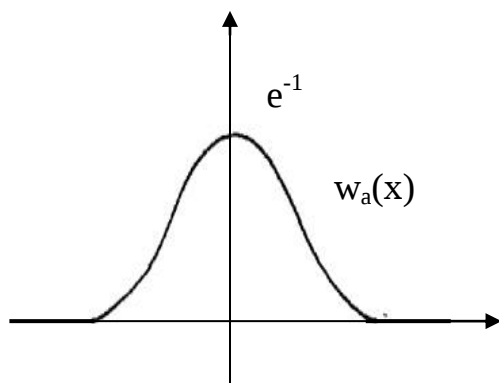


Рисунок 1 - График функции $W_a(x)$

Совершенно ясно, по виду этой функции, что для $|x| < a$ и для $|x| > a$ она бесконечно дифференцируема. Не трудно показать, что в точках $x = \pm a$ производная существует и равна нулю. $w_a^{(n)}(\pm a) = 0, \forall n = 1, 2, \dots$

Введем для множества функций D понятие сходимости последовательности основных функций.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ основных функций сходится к $\varphi(x) \in D$, если выполнены два условия:

1) $\exists (-a, a); \forall n: \text{Supp}\varphi_n(x) \in (-a, a)$. Другими словами: существует общий интервал такой, что носители всех функций лежат на этом интервале.

2) $\forall k=0, 1, 2, \dots$ последовательность $\{\varphi_n^{(k)}(x)\} \rightarrow \varphi^{(k)}(x)$ - сходится равномерно на R. Это очень сильное условие. Отметим, что равномерная сходимость на R эквивалентна равномерной сходимости на $(-a; a)$. $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве D – это необычная сходимость, а сходимость, как мы ее определили. Множество основных функций D с введенным понятием сходимости называется пространством основных функций.

Пример. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \omega_a(x)$. Докажем, что $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$. Надо доказать, что

$$\forall k: \{\varphi_n^{(k)}(x)\} = \left\{ \frac{1}{n} \omega_a^{(k)}(x) \right\} \rightarrow 0 \text{ на } R$$

или что тоже самое на $(-a; a)$. $\text{Supp}w_a(x) = [-a; a]$. Воспользуемся равномерной сходимостью связанной с supremumом.

Рассмотрим

$$\sup_{[-a; a]} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = \sup_{[-a; a]} \left| \frac{1}{n} \omega_a^{(k)}(x) \right| =$$

$$\frac{1}{n} \sup_{[-a; a]} |\omega_a^{(k)}(x)| \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-a; a]} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = 0, \text{ а это и}$$

означает, что $\{\varphi_n^{(k)}(x)\} \rightarrow \varphi^{(k)}(x) = 0$ на $[-a; a]$, т.е. $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве D.

Определение 2. Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой $\varphi(x)$ ставится в соответствие $u(\varphi)$ – число ($\forall \varphi(x) \rightarrow u(\varphi)$).

Определение 3. Функционал $u(\varphi)$ называется линейным, если для любых $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из D и для любых чисел α и β ($\forall \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in D$ и $\forall \alpha, \beta \in R$) выполняется равенство: $u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$.

Пример. Пусть $f(x)$ определена на всей R и интегрируема на любом сегменте – такая функция называется локально интегрируемой. Каждой $\varphi(x) \in D$ поставим в соответствие число

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx. \text{ Интеграл в}$$

этом определении на самом деле собственный. Докажем, что этот функционал линейный:

$$u(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)dx +$$

$$+ \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)dx = \alpha u(\varphi_1) + \beta u(\varphi_2)$$

Пример нелинейного функционала: множество функций $\varphi(x)$ задано на $[a, b]$, $\varphi'(x)$ – непрерывна. Класс таких функций обозначим $C^1[a, b]$: $\varphi(x) \in C^1[a, b]$. Каждой функции $\varphi(x)$ поставим в соответствие

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx, \text{ это длина}$$

кривой $y=f(x)$, где $x \in [a, b]$.

Определение 4. Функционал $u(\varphi)$ определенный на D называется непрерывным, если $\forall \{\varphi_n(x)\} \rightarrow \varphi(x)$ в D: $\{u(\varphi_n)\} \rightarrow u(\varphi)$.

Существует общий интервал такой, что носители всех функций лежат на этом интервале.

Замечание. Применив соответствующие теоремы предельного перехода под знаком интеграла, можно показать, что функционал

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (1), \quad \text{является}$$

непрерывным.

Введем обозначение: $\hat{f}$ – функционал, порожденный локально интегрируемой функцией $f(x)$, а правую часть равенства (1)

будем обозначать, $(\hat{f}, \varphi)$, то есть

$$(\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (2)$$

В дальнейшем значения любого функционала $\hat{f}$ на функции $\varphi(x) \in D$ будем обозначать $(\hat{f}, \varphi)$.

Определение 5. Любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве D основных функций назовем обобщенной функцией.

Определение 6. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций сходится к обобщенной функции $\hat{f}$, если $\forall \varphi(x) \in D: \{(\hat{f}_n, \varphi)\} \rightarrow (\hat{f}, \varphi)$ при $n \rightarrow \infty$.

Множество всех обобщенных функций с введенным понятием сходимости называется пространством обобщенных функций и обозначается D' . Записывать будем так: $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве D' .

Таким образом пространство D – это пространство аргументов обобщенных функций и есть пространство обобщенных функций D' .

Сделаем это пространство линейным: введем операции сложения и умножения элемента пространства на число.

Отметим, что пространство D основных функций является линейным пространством с обычными операциями сложения двух функций и умножения функции на число. Введем операции сложения и умножения на число в пространстве D' .

Пусть f и g – это обобщенные функции из D' . Суммой $f+g$ назовем функционал, определенный равенством

$$\forall \varphi(x) \in D: (f+g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi).$$

Произведением обобщенной функции f на число α (αf) назовем функционал, действующий по правилу: $\forall \varphi(x) \in D: (\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$.

Надо еще доказать, что введенные таким образом, сумма и произведение обобщенной функции на число являются линейными и

непрерывными функционалами, то есть доказать, что $f+g$ и αf являются линейными непрерывными функционалами, то есть обобщенными функциями. Надо еще проверить, что эти действия удовлетворяют аксиомам линейного пространства, что очевидно.

Задание. Проверить выполнение аксиом линейного пространства для введенных действий сложения и умножения на число обобщенных функций. Нулевой элемент в пространстве D' – каждой функции φ ставится в соответствие число 0.

3. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.

Пусть $f(x)$ – локально интегрируема функция.

Она порождает функционал $\hat{f}$, который действует по правилу:

$$\forall \varphi(x): (\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Такие обобщенные функции называются регулярными. Наряду с регулярными, существуют сингулярные обобщенные функции, то есть обобщенные функции не являющиеся регулярными.

Классическим примером сингулярной обобщенной функции является δ – функция. Она определяется: $\forall \varphi(x) \in D: (\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

Теорема 1. δ – функция является линейным непрерывным функционалом, то есть обобщенной функцией.

Докажем линейность. Рассмотрим действие:

$$(\delta, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\delta(\varphi_1) + \beta\delta(\varphi_2). \quad \text{Это значит, что } \delta \text{ – функция линейный функционал.}$$

Докажем непрерывность этого функционала. Надо доказать, что: $\forall \{\varphi_n(x)\} \rightarrow \varphi$ в пространстве $D: (\delta, \varphi_n) \rightarrow (\delta, \varphi) = \varphi(0)$ (1).

Так как $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ в D , то $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в каждой точке x , в том числе и в точке $x=0$, то есть $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0)$, при $n \rightarrow \infty$ (2). Так как $(\delta, \varphi_n) = \varphi_n(0)$, то из (2) следует $(\delta, \varphi_n) \rightarrow (\delta, \varphi)$, что и доказывает непрерывность δ – функции.

Теорема 2. δ – функция является сингулярной обобщенной функцией.

Докажем методом от противного. Предположим, что δ – функция – регулярная обобщенная функция, то есть существует локально интегрируема $f(x)$, такая, что

$$\forall \varphi(x) \in D: (\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Возьмем в качестве $\varphi(x) = \omega_a(x)$, тогда

$$(\delta, \omega_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_a(x)dx = \int_{-a}^{+a} f(x)\omega_a(x)dx.$$

С другой стороны, по определению δ – функции:

$$(\delta, \omega_a) = \omega_a(0) = \frac{1}{e}, \text{ следовательно}$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x) \omega_a(x) dx = \frac{1}{e}. \quad (3).$$

Перейдем к пределу при $a \rightarrow +0$, тогда левая часть (3) стремится к нулю, но это противоречит тому, что правая часть равна $\frac{1}{e}$.

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно, и, значит, δ – функция сингулярная обобщенная функция.

Теорема 3. δ – функцию можно представить как предел последовательности регулярных обобщенных функций. Оказывается, что таких последовательностей бесконечно много, достаточно указать одну.

Возьмем: $\forall a > 0$, введем функцию

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{если } |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}.$$

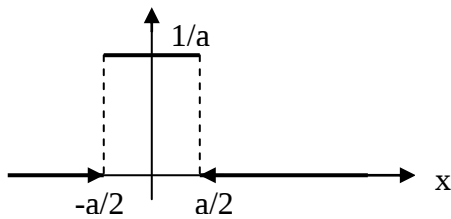


Рисунок 2 - График функции $\delta_a(x)$

Каждая функция $\delta_a(x)$ порождает регулярную

обобщенную функцию $\hat{\delta}_a$, которая действует следующим образом:

$$\forall \varphi(x) \in D: (\hat{\delta}_a, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x) dx$$

Докажем, что $\hat{\delta}_a \xrightarrow{\text{сходится}} \delta$ – функции при $a \rightarrow +0$ в пространстве D' . Покажем, что:

$$\forall \varphi(x) \in D: (\hat{\delta}_a, \varphi) \rightarrow (\delta, \varphi) = \varphi(0), \text{ при}$$

$$a \rightarrow +0 \text{ или что тоже самое } (\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0) \rightarrow 0$$

при $a \rightarrow +0$ (4).

По определению обычного предела, надо доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a_0 > 0: |(\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| < \varepsilon \quad (5), \text{ при}$$

$$0 < a < a_0.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x=0$, то

$$\exists a_0 > 0: |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon, \quad \text{при } |x| < a_0.$$

Используя это неравенство, получаем:

$$|(\hat{\delta}_a, \varphi) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(x) dx - \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \varphi(0) dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \right| < \frac{1}{a} \varepsilon \int_{-a/2}^{a/2} dx = \varepsilon, \quad \text{при}$$

условии: $0 < a < a_0$, т.е. выполнено неравенство (5) и тем самым теорема доказана.

Вывод: Разобрались с классической обобщенной функцией, которая называется δ – функция. Во первых, что это действительно обобщенная функция – линейный непрерывный функционал. Во вторых – это сингулярная обобщенная функция, в третьих, что ее можно представить как предел обычных регулярных обобщенных функций. Возникает вопрос: почему эти функционалы линейные и непрерывные называются обобщенными функциями, потому что в определенном смысле все обычные функции, по крайней мере все локально интегрируемые функции, они порождают обобщенные функции, которые мы назвали регулярные, но все множество обобщенных функций значительно шире, то оказывается, что не только δ – функцию, а любую сингулярную обобщенную функцию можно представить как предел регулярных обобщенных функций, что доказывается в теории обобщенных функций. Значит регулярно обобщенные функции, с одной стороны, порождаемые обычными функциями, а не регулярные сингулярные получены как пределы этих регулярных обобщенных функций, тем самым у истоков стоят обычные функции.

Подведение итогов:

1. Ввели пространство основных функций D – это множество всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой прямой.

2. Каждая функция финитная, для каждой функции есть интервал, вне которого она равна нулю.

3. На этом пространстве основных функций мы определили функционалы и более того мы ввели понятия линейного и непрерывного функционала. И любой линейный непрерывный функционал, определенный на этом пространстве D мы назвали обобщенной функцией.

Мы ввели понятие сходимости последовательностей функционалов. Для последовательности обобщенных функций и

вообще функционалов сходимость называется слабая сходимость.

Выяснили, что все обобщенные функции делятся на два класса: регулярные и сингулярные. Что такое регулярная обобщенная функция? Пусть есть $f(x)$ определенная на $\mathbb{R}$ и интегрируемая на любом сегменте, такую функцию мы назвали локально интегрируемой.

Каждая такая функция порождает функционал $\hat{f}$, определенный на пространстве

$$D: \forall \varphi(x) \in D: (\hat{f}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \text{ все}$$

такие обобщенные функции $\hat{f}$, порожденные обычными локально интегрируемыми функциями, мы называем регулярными обобщенными функциями, а все обобщенные функции, которые не являются регулярными, мы назвали сингулярными.

Рассмотрели классический пример обобщенных функций – это δ – функция.

$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Из этого определения следует, что δ – функция функционал, но будет он линейным и непрерывным, доказали, δ – функция сингулярная.

Замечание к теореме 3. Положим $a = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots \Rightarrow a \rightarrow +0$ при $n \rightarrow +\infty$. Из теоремы 3 следует $\hat{\delta}_{1/n} \xrightarrow{\text{сходится}} \delta$ – функции, при $n \rightarrow \infty$ в D' .

4. Действия над обобщенными функциями. Локальные свойства обобщенных функций.

Определение 1. Будем говорить, что обобщенная функция $f=0$ на интервале I , если для $\forall \varphi(x) \in D$, носитель которой $\text{Supp} \varphi(x) \subset I$: $(f, \varphi) = 0$. Иногда это записывают так: $f(x)=0$ при $x \in I$.

Определение 2. Обобщенные функции f и g называются равными (или равны) на интервале I , если $f-g=0$ на интервале I .

Объединение всех интервалов на которой обобщенная функция $f=0$, называется нулевым множеством этой обобщенной функции, обозначение O_f .

Дополнение множества O_f до всей прямой, т.е. разность: $\mathbb{R} - O_f$ называется носителем обобщенной функции f ($\mathbb{R} - O_f = \text{Supp} f$). Если носитель ограниченное множество, то такая обобщенная функция называется финитной.

Пример. Рассмотрим δ – функцию. Для $\forall I$, не содержащего точку $x=0$, $\delta(x)=0$.

Доказательство. Возьмем $\forall \varphi(x)$, носитель которой $\text{Supp} \varphi(x) \in I$. Отсюда следует $\varphi(0)=0$ и значит $(\delta, \varphi) = \varphi(0) = 0$. Нулевое множество для δ –

функции: $O_\delta = (x < 0) \cup (x > 0)$. Значит, носителем δ – функции является единственная точка $x=0$. $\text{Supp} \delta = \{x=0\}$. Это так называемые локальные свойства δ – функции.

4.1. Действия над обобщенными функциями.

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.

Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция, она порождает регулярную обобщенную

функцию $\hat{f}$ и пусть $a(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на всей прямой, т.е. $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим регулярную

обобщенную функцию $\hat{af}$. $\forall \varphi(x) \in D$:

$$\begin{aligned} (\hat{af}, \varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (a(x)f(x))\varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(a(x)\varphi(x))dx = (\hat{f}, a\varphi) \end{aligned}$$

Итак, для $\forall$ регулярной обобщенной функции

$\hat{f}$ и для $\forall a(x) \in C^\infty \mathbb{R}$, справедливо равенство:

$(\hat{af}, \varphi) = (\hat{f}, a\varphi)$ (1). Равенство (1) получено для регулярных обобщенных функций.

Замечание 1. Для сингулярных обобщенных функций равенство (1) принимается в качестве определения.

Определение 3. Произведением обобщенной функции f на $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ называется функционал, действующий по

правилу: $\forall \varphi(x) \in D: (\hat{af}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{f}, a\varphi)$.

Замечание 2. Отметим, что для регулярных обобщенных функций это равенство доказано, а для сингулярных обобщенных функций принимается в качестве определения.

Пример.

$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) = a(0)(\delta(x), \varphi(x))$. Отсюда следует, что $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

4.2. Линейная замена переменной в обобщенных функциях.

Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция и пусть a и b – числа, причем $a \neq 0$, тогда $f(ax+b)$ – локально интегрируемая функция.

Обозначим через $\hat{f}(ax+b)$ – регулярную обобщенную функцию, порождаемой функцией $f(ax+b)$.

$$\begin{aligned} \forall \phi(x) \in D: (\hat{f}(ax+b), \phi(x)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\phi(x)dx \end{aligned} \quad (2).$$

Замена переменной $ax+b=t$,

$$x = \frac{t-b}{a}, dx = \frac{dt}{a}.$$

Надо рассмотреть три случая $a>0$, $a<0$, $a=0$.

Объединив эти три случая, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax+b)\phi(x)dx &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \left(\hat{f}(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) \end{aligned} \quad (3).$$

Из (2) и (3) следует, что

$$(f(ax+b), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left(\hat{f}(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right)$$

Полученное равенство называется формула линейной замены переменной в обобщенных функциях. Она доказана для регулярных обобщенных функций. Для сингулярных обобщенных функций возьмем в качестве определения замены переменной.

Определение 4. Обобщенная функция $f(ax+b)$ – это функционал, действующий по правилу:

$$\begin{aligned} \forall \phi(x) \in D: (f(ax+b), \phi(x)) &= \\ &= \frac{1}{|a|} \left(f(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right) \end{aligned}$$

Для регулярных обобщенных функций это доказано. Для сингулярных обобщенных функций принимается в качестве определения.

Рассмотрим два частных случая:

1) $a=1$, $b=-c$, тогда $(f(x-c), \phi(x)) = (f(x), \phi(x+c))$ это формула сдвига аргумента обобщенной функции.

2) $b=0$, $a \neq 0$, тогда

$$(f(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left(f(x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right) - \text{это формула}$$

растяжения аргумента обобщенной функции.

Рассмотрим, как это выглядит для δ – функции. Возьмем $\delta(x)$:

$(\delta(x-c), \phi(x)) = (\delta(x), \phi(x+c)) = \phi(x+c)|_{x=0} = \phi(c)$. И так $(\delta(x-c), \phi(x)) = \phi(c)$. Эти формулы встречаются в курсах теоретической физики и в курсах уравнений математической физики.

$$(\delta(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} \left(\delta(x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right) = \frac{1}{|a|} \phi(0),$$

$$(\delta(ax), \phi(x)) = \frac{1}{|a|} (\delta(x), \phi(x)).$$

Вывод:

Растяжение аргумента у δ – функции, а именно, если в место x взять ax , то

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

Возьмем $a=-1$, тогда $\delta(-x) = \delta(x)$ – это четность. δ – функции, нельзя понимать в обычном смысле.

5. Дифференцирование обобщенных функций.

Пусть $f(x) \in C^\infty(R)$ и является локально интегрируемой. Производные будем обозначать двойкой: $f'(x) = Df(x)$, где D – оператор дифференцирования, тогда

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = D(Df) = \\ &= D^2 f, \dots, f^{(n)}(x) = D^n f(x) \end{aligned}$$

Обозначим через $\hat{D} f$ регулярную обобщенную функцию, порождаемую $f'(x) = Df(x)$.

Для

$$\begin{aligned} \forall \phi(x) \in D: (\hat{D} f, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Df(x)\phi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx = \\ &= f(x)\phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx = \\ &= 0 - (\hat{f}, \phi') = -(\hat{f}, D\phi) \end{aligned}$$

И так, для регулярной обобщенной функции, бесконечно дифференцируемой:

$$(\hat{D} f, \phi) = -(\hat{f}, D\phi) \quad (4).$$

Аналогично, применяя интегрирование по частям n раз, приходим к равенству:

$$(\hat{D}^n f, \phi) = (-1)^n (\hat{f}, D^n \phi) \quad (5)$$

$\forall n=1, 2, \dots$

И так, равенства (4) и (5) получены для бесконечно дифференцируемой, локально интегрируемой функции $f(x)$, т.е. они получены для регулярных обобщенных функций.

Замечание. Для сингулярных обобщенных функций примем формулы (4) и (5) в качестве определения производных обобщенной функции.

Определение 1. Обобщенная функция $D^n f$ – это функционал, действующий по правилу: $\forall \phi(x) \in D: (D^n f, \phi) = (-1)^n (f, D^n \phi)$ $n=1, 2, \dots$. Из этой формулы следует, что любая обобщенная функция имеет производную любого порядка.

Пример 1. Введем функцию Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Она применяется в различных разделах теоретической физике, особенно в радиофизике. Она порождает регулярную обобщенную

функцию $\hat{\Theta}$.

$$\begin{aligned} \forall \varphi(x) \in D: (\hat{\Theta}, \varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x) \varphi(x) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

По формуле (4):

$$\begin{aligned} (D\hat{\Theta}, \varphi) &= -(\hat{\Theta}, D\varphi) = -(\hat{\Theta}, \varphi') = \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} = 0 + \varphi(0) = \\ &= (\delta(x), \varphi(x)) \\ (D\hat{\Theta}, \varphi) &= (\delta(x), \varphi(x)). \text{ Отсюда следует} \\ D\hat{\Theta}(x) &= \delta(x). \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить производную δ – функции по формуле (4).

$$\begin{aligned} (D\delta(x), \varphi(x)) &= -(\delta(x), D\varphi(x)) = \\ &= -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\forall n: (D^n \delta(x), \varphi(x)) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Пример 3. Рассмотрим обобщенные функции, порожденные $\sin x$ и $\cos x$. $\sin x$ порождает регулярную обобщенную

функцию $\hat{\sin} x$, а $\cos x$ порождает $\hat{\cos} x$.

$$(\hat{\sin} x, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \varphi(x) dx.$$

По формуле (4):

$$\begin{aligned} (D\hat{\sin} x, \varphi(x)) &= -(\hat{\sin} x, \varphi'(x)) = \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \varphi'(x) dx = \\ &= -\sin x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x dx = \\ &= 0 + (\hat{\cos} x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

Это означает, что $D\hat{\sin} x = \hat{\cos} x$. Аналогично можно показать, что

$$D\hat{\cos} x = -\hat{\sin} x.$$

Заключение

Новые задачи физики и математики, появившиеся в XX столетии, привели к

появлению нового понятия функции – обобщенной функции или распределения. Обычное понятие функции, которое ставит в соответствие каждому значению (из некоторой области определения этой функции) соответствующее ему значение, оказалось абсолютно недостаточным. Потребность в подобном обобщении возникает во многих физических и математических задачах. Обобщенные функции дают возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т.д. Теория обобщенных функций – оформившаяся в последние годы область функционального анализа; она возникла в связи с потребностями математической физики и позволила правильно поставить и разрешить ряд классических проблем прикладного значения. В понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в малых окрестностях данной точки. Поэтому, техника обобщенных функций служит удобным и адекватным средством для описания многих распределений различных физических величин.

Строгая математическая теория обобщенных функций была построена С.Л. Соболевым, Л. Шварцем и другими математиками. С.Л. Соболев впервые разработал теорию обобщенных функций в связи с исследованием гиперболических уравнений. Л. Шварц, развивая теорию обобщенных функций (которые он называл распределениями), построил теорию их преобразования Фурье. Большое внимание он уделил их приложениям к математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

В настоящее время эта теория нашла приложения почти во всех областях математики и ее приложений, физике и других областях естествознания.

Литература

1. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2004. – 250 с.
2. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними/ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилков. – М.:Добросвет: КДУ, 2007. – 408 с.
3. Дирак, П. А. Основы квантовой механики/ П.А. Дирак, пер. с англ. – М.: Проспект, 2001. – 210 с.
4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 2006. – 210 с.

5. Лапинова, С.А. Современные методы прикладной математики (обобщенные функции и асимптотические методы)/ С.А. Лапинова, А.И. Саичев, В.А. Филимонов. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. – 260 с.
6. Рид, М. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ/ М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 2007. – 185 с.
7. Робертсон, А. Топологические векторные пространства/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1999. – 155 с.
8. Рудин, У. Функциональный анализ/ У. Рудин. – М.: Мир, 2005. – 200 с.
9. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 2005. – 200 с
10. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике/ С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с
11. Соболев, С.Л. Николай Максимович Гюнтер. Библиографический очерк/ С.Л. Соболев, В.И. Смирнов. – М.: ГИТТЛ, 2003. – 195 с.
12. Фалалеев, М.В. Обобщенные функции и действия над ними/ М.В. Фалалеев. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. ун-та, 2011. – 163 с.

Добровольский Ю. Н. Теория обобщенных функций и их применение на практике. Рассмотрены основные этапы развития теории обобщенных функций. Введено пространство D – бесконечно дифференцируемых, финитных функций на всей числовой прямой. На пространстве D определили линейный непрерывный функционал и назвали его обобщенной функцией. Ввели понятие слабой сходимости последовательностей функционалов. Обобщенные функции разделили на два класса: регулярные и сингулярные. Изучили основные свойства обобщенных функций. Привели обобщенное решение простейших дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: пространство основных функций, финитная функция, обобщенная функция, функционал, слабая сходимость, регулярные и сингулярные функции.

Dobrovolsky Yu. N. Theory of generalized functions and their application in practice. The main stages of the development of the theory of generalized functions are considered. The space of D – infinitely differentiable, finite functions on the entire numerical line is introduced. A linear continuous functional was defined on the space D and called its generalized function. The concept of weak convergence of sequences of functionals was introduced. Generalized functions were divided into two classes: regular and singular. We have studied the basic properties of generalized functions. A generalized solution of the simplest differential equations was given.

Keywords: space of basic functions, finite function, generalized function, functional, weak convergence, regular and singular functions.

Статья поступила в редакцию 20.08.2022
Рекомендована к публикации профессором Зори С. А.