УДК 004.83+510.6

Расширение возможностей логического анализа за счет уточнения интерпретации исчисления предикатов

Б.А. Кулик
Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург
ba-kulik@yandex.ru

Аннотация
Одним из вариантов интерпретации исчисления предикатов является представление предикатов и логических формул в виде отношения, в котором областью истинности (domain) всех переменных является одно и то же множество. В эту интерпретацию внесены следующие изменения: 1) разным переменным соответствуют разные области их изменения; 2) n-местные отношения представлены не как множества кортежей значений переменных, а как объединения декартовых произведений. Обосновано, что математической моделью измененной интерпретации является алгебра кортежей. Такое изменение интерпретации позволяет существенно расширить аналитические возможности логического анализа, в частности, решить задачу вычисления следствий с заданными свойствами.

Введение

В основе современной логики лежит сформировавшийся на рубеже XIX и XX столетий ***аксиоматический подход***, в котором предпочтение отдается формальным языкам и способам преобразования символьных выражений с помощью правил вывода. Часто аксиоматический подход называют ***синтаксическим подходом***. В рамках этого подхода в XX веке развивалась современная ***теория множеств***, основы которой были заложены исследованиями Г. Кантора, Р. Дедекинда и др. в последней четверти XIX века. Через некоторое время были открыты парадоксы теории множеств (Г. Кантор, Ч. Бурали-Форти, Б. Рассел и др.), а на рубеже XIX и XX столетий стали завоевывать популярность публикации математиков и философов, заложивших основы современного аксиоматического подхода (Г. Фреге, Ч. С. Пирс, Дж. Пеано, Б. Рассел и др.) [1].

На фоне этих событий начала свое развитие математическая логика, в основаниях которой термин «множество» оказался под запретом, в силу обнаруженных парадоксов теории множеств. Хотя даже не специалисту в логике понятно, что термин сам по себе не может быть противоречивым – его противоречивость может зависеть от того, как этот термин определили и как его связали с другими терминами теории.

Впоследствии вместо теории множеств в математике был предложен более простой ее вариант – ***алгебра множеств***, законы которой могут быть обоснованы без аксиом на основе лишь определений операций (дополнение, пересечение, объединение) и отношений (включения и равенства) [2].

Законы алгебры множеств соответствуют законам классической логики, поэтому возможность доказать законы алгебры множеств без аксиом означает, что для обоснования классической логики нет необходимости в аксиомах.

Одним из источников противоречий в теории множеств является то, что в этой теории разрешается множеству быть элементом множества. Такое допущение в некоторых разделах математики присутствует и в настоящее время. Однако в алгебре множеств это допущение можно убрать – законы алгебры множеств от этого не изменятся. Обусловлено это тем, что в алгебре множеств в отличие от теории множеств системообразующим является не отношение принадлежности элемента и множества, а отношение включения множеств, для которого «самоприменимость» ($A \subseteq A$) не инициирует парадоксов. Поэтому запрет термина «множество» в основаниях логики нельзя считать обоснованным.

В данной работе в качестве основного источника знаний по математической логике использована книга Э. Мендельсона [3], выдержавшая с 1964 по 2015 годы 6 переизданий. На русском языке в 1971 году было опубликовано 3-е издание этой книги [4].

В [3] (с. 66, в русском переводе с. 65) есть текст, который достаточно четко характеризует современное состояние логики: «Поскольку семантические понятия носят теоретико-множественный характер, а теория множеств, по причине парадоксов, представляется в известной степени шаткой основой для исследований в области математической логики, то многие логики считают более надежным синтаксический подход, состоящий в изучении формальных аксиоматических теорий с применением лишь довольно слабых арифметических методов».

Обратите внимание в этой цитате на противопоставление семантического (т.е. теоретико-множественного) и синтаксического (т.е. аксиоматического) подходов. И еще одно интересное наблюдение: «шаткая основа» (теория множеств) подробно изложена в четвертой главе книги Э. Мендельсона.

Уточнение интерпретации исчисления предикатов

В [3] была предложена следующая интерпретация языка первого порядка (этот язык лежит в основе исчисления предикатов первого порядка): в качестве области интерпретации (*domain*) для всех переменных используется одно и то же множество D элементов (констант), а для n-местных предикатов и формул с n свободными переменными областью интерпретации является n-местное отношение, т.е. подмножество n-местных кортежей элементов из декартова произведения (ДП) множеств D^n. При этом множество D не определено.

Предложенная в [3, 4] интерпретация по сути является упрощенным вариантом математического отношения, которое определяется как некоторое подмножество произвольно выбранного ДП. Упрощение выражается в том, что, во-первых, в этой интерпретации разные переменные привязаны только к одной области D, и, во-вторых, в логическом анализе представление отношений только в виде множества кортежей элементов часто приводит к сложностям при обоснованиях закономерностей, а также при формулировании условий задач и их решении. С учетом этого в данную интерпретацию языка первого порядка было предложено внести следующие изменения [5, 6].

Изменение 1. Для разных переменных предлагается использовать не одну какую-то область интерпретации D, а разные области интерпретации, которые соответствуют предметной области рассуждения. В соответствии с этим по аналогии с базами данных предлагается называть ***атрибутами*** имена разных областей интерпретации для разных переменных, а сами области интерпретации (т.е. множества всех значений атрибутов) ***доменами*** этих атрибутов. Например, если в качестве атрибута используются «Дни недели», то доменом этого атрибута является множество всех названий дней недели.

Изменение 2. Для обоснования закономерностей и решения многих задач логического анализа более удобно рассматривать n-местное отношение не как множество кортежей элементов, а как ДП или их объединения. Поскольку ДП формируется из множеств, то в качестве значений атрибута используются не элементы его домена, а имена или обозначения (например, A_2 или $\{d, f\}$) всех подмножеств домена. Множества с этими именами или обозначениями названы ***компонентами*** атрибута. Короче: *компоненты – это произвольные подмножества домена атрибута*.

Исследования показали, что усовершенствованную интерпретацию языка первого порядка можно выразить с помощью алгебры множеств. Но для этого потребовалось разработать и обосновать новую математическую структуру, получившую название ***алгебра кортежей*** [5, 6]. С алгеброй множеств ее связывает то, что в ней используются те же операции (дополнение, пересечение, объединение), те же отношения (равенства и включения) и те же законы (де Моргана, контрапозиции, транзитивности, непротиворечия и т.д.). Отличие только в том, что в ней используются не обычные множества, а сжатые структуры, которые можно с помощью определенных вычислений представить множествами n-местных кортежей элементов (т.е. традиционными n-местными отношениями). Эти структуры – ***объединения ДП множеств***. Как выяснилось в процессе исследований, эти структуры вместе с их дополнениями являются интерпретациями основных типов формул математической логики.

Основные понятия алгебры кортежей

В алгебре кортежей декартово произведение множеств используется в качестве основного понятия. Поэтому целесообразно рассказать о нем более детально. ДП было введено в математику в конце XIX века Г. Кантором [3]. Декартово произведение двух множеств – это множество всех возможных двуместных кортежей (пар) элементов, у которых на первом месте стоит элемент из первого множества, а на втором – элемент из второго множества. Например, если даны множества $X = \{a, c\}$ и $Z = \{a, f, k\}$, то их ДП можно представить в виде множества, содержащего 6 кортежей:

$$X \times Z = \{(a, a), (a, f), (a, k), (c, a), (c, f), (c, k)\}.$$

Аналогично определяются ДП для трех и более множеств. В этих случаях элементы ДП – это кортежи из трех и более элементов. Если в ДП участвуют одинаковые множества, например, $D \times D \times D$, то ДП можно записывать как возведение в степень: $D \times D \times D = D^3$. Рассмотрим пример использования ДП в логическом анализе.

Пример 1 (задача «Поиск клада»). Перед нами три пещеры, в каждой из них может быть либо клад (*К*), либо ядовитые змеи (*З*), либо пещера пуста (*П*), при этом змеи присутствуют, по крайней мере, в одной из пещер, а клад – только в одной пещере. Для поиска клада необходимо воспользоваться двумя подсказками, при этом известно, что первая подсказка истинная, а вторая – ложная:

Подсказка 1: Во второй пещере нет змей, а третья пещера не пуста.

Подсказка 2: Первая пещера не пуста, а во второй нет змей.

Требуется определить, в какой пещере находится клад.

Решение задачи будет приведено ниже. Пока же рассмотрим, как можно выразить некоторые условия задачи с помощью ДП. Перечисление всех возможных ситуаций в пещерах без учета ограничений можно получить, вычислив ДП

$\{К, З, П\}\times\{К, З, П\}\times\{К, З, П\} = \{К, З, П\}^3$.

В этом случае мы получим 27 разных вариантов (трехместных кортежей). Подсказку 1 можно выразить с помощью ДП

$\{К, З, П\}\times\{К, П\}\times\{К, З\}$,

т. е. получим 12 вариантов.

Объединение декартовых произведений, рассматриваемое как отдельная структура, ранее в математике не встречалось. Для этой структуры не были известны алгоритмы операций (дополнение, пересечение, объединение), алгоритмы проверок включения одной структуры в другую и т.д. В некоторых учебниках и руководствах по математике содержатся только алгоритмы для двух операций с ДП (пересечения и разности), а также алгоритм проверки включения одного ДП в другое. Оказалось, что формулировку всех свойств декартовых произведений и их обоснования можно существенно упростить, если отказаться от общепринятых обозначений ДП (D^n, $A \times B \times C$, $\prod_{i=1}^{n} S_i$ и т.д.). Вместо этого предложено представлять ДП как кортежи компонент, при этом каждая компонента с помощью схемы отношения привязывается к определенному атрибуту.

Алгебра кортежей (АК) – математическая система для моделирования и анализа многоместных отношений, основанная на свойствах ДП. Отношения в АК выражаются с помощью структур, которые называются ***АК-объектами***. Их всего четыре: *C*-кортежи, *C*-системы, *D*-кортежи и *D*-системы**.**

К именам АК-объектов приписывается ***схема отношения*** – заключенная в квадратные скобки последовательность атрибутов. Например, $R[KLM]$ означает, что отношение R является подмножеством ДП $K \times L \times M$.

АК-объекты с одинаковыми схемами отношений называются ***однотипными***.

Алгоритмы выполнения операций с АК-объектами, проверок включения, преобразований в другие типы и т.д. сформулированы и доказаны в АК в виде теорем. Структуры АК матричные, причем в ячейках матриц записываются не элементы, а обозначения компонент.

Среди всех возможных компонент АК выделяются два типа, названных ***фиктивными компонентами***.

Полная компонента (обозначается «*») равна домену соответствующего атрибута.

Пустая компонента (обозначается «$\varnothing$») равна пустому множеству.

Перейдем к определению типов АК-объектов.

C-кортеж – это *n*-местное отношение, равное ДП содержащихся в нем компонент, которые записаны в виде кортежа, ограниченного квадратными скобками.

Например, подсказку 1 в Примере 1 можно выразить как *C*-кортеж

$M_1[C_1C_2C_3] = [\ast\ \{К, П\}\ \{К, З\}]$,

где C_1, C_2, C_3 – атрибуты (для данного примера – обозначения пещер с соответствующими номерами), а символ $\ast$ обозначает множество, равное домену атрибута C_1, т.е. множество возможных вариантов содержимого в данной пещере, в данном случае $\{К, З, П\}$.

Если заданы однотипные *C*-кортежи, то можно вычислить их пересечение или проверить включение одного *C*-кортежа в другой. Это можно выполнить, используя следующие теоремы (здесь и далее номера теорем соответствуют номерам в [5, 6]).

Теорема 1 (проверка включения однотипных *C*-кортежей). Пусть даны два однотипных *C*-кортежа $P = [P_1\, P_2 \ldots P_N]$ и $Q = [Q_1\, Q_2 \ldots Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых *C*-кортежей.

Теорема 2 (пересечение однотипных *C*-кортежей). Пусть даны два однотипных *C*-кортежа $P = [P_1\, P_2 \ldots P_N]$ и $Q = [Q_1\, Q_2 \ldots Q_N]$. Тогда

$$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ \ P_2 \cap Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cap Q_N].$$

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных *C*-кортежей). Пусть даны два однотипных *C*-кортежа $P = [P_1\, P_2 \ldots P_N]$ и $Q = [Q_1\, Q_2 \ldots Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Рассмотрим пример использования Теоремы 2. Предположим, что в Примере 1 обе подсказки истинные. Тогда мы можем сократить число возможных вариантов, если вычислим пересечение соответствующих этим подсказкам *C*-кортежей, при этом необходимо учесть, что для любой компоненты A соблюдается $\ast \cap A = A$. Подсказку 2 можно выразить как

$M_2[C_1C_2C_3] = [\{К, З\}\ \{К, П\}\ *]$. Тогда в соответствии с Теоремой 2
$M_1[C_1C_2C_3] \cap M_2[C_1C_2C_3] = [\{К, З\}\ \{К, П\}\ \{К, З\}]$.

Теоремы 2 и 3 устанавливают, что пересечение *C*-кортежей, если оно не равно пустому множеству, можно выразить как *C*-кортеж. Однако объединение *C*-кортежей равно единственному *C*-кортежу лишь в исключительных случаях (эти случаи определены в [5, 6]). Поэтому возникает необходимость в определении структуры нового типа.

C-система – это отношение, равное объединению однотипных *C*-кортежей, которое записывается в виде матрицы, ограниченной квадратными скобками.

Например, $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть

C система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т.д. Фиктивная компонента в первом *C*-кортеже соответствует домену атрибута *Y*, а во втором – домену атрибута *Z*. Данная *C*-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z)$.

Использование объединений ДП в качестве математической модели позволяет получить ряд преимуществ при моделировании и анализе многоместных отношений. Ясно, что для отображения отношений с помощью АК-объектов во многих случаях требуется меньший объем памяти, При этом надо учесть, что компонентами АК-объектов могут быть любые, в том числе и бесконечные множества (например, множества целых чисел с определенными кратностями или системы интервалов на числовых осях).

Еще одним преимуществом является возможность моделировать и исследовать неопределенности в знаниях, так как компоненту, содержащую более одного элемента, можно представить как множество возможных вариантов значений атрибута.

С помощью *C*-кортежей и *C*-систем можно выразить любое многоместное отношение, но для вычисления их дополнений требуются новые структуры – *D*-кортежи и *D*-системы. Для их определения используется промежуточная структура – диагональная *C*-система.

Диагональная C-система – это *C*-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты – полные.

Например, $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ – диагональная *C*-система.

Доказано, что диагональная *C*-система есть результат вычисления дополнения некоторого *C*-кортежа. При этом надо учесть, что дополнение каждой компоненты вычисляется при условии, что универсумом этой компоненты является домен соответствующего ей атрибута. Например, если задан *C*-кортеж $R[KLM] = [A\ \ B\ \ *]$, то дополнение компоненты *B* (т. е. $\overline{B}$) вычисляется относительно множества *L*, принятого в данном случае в качестве универсума, а дополнением компоненты $*$ будет пустое множество ($\varnothing$) в любом случае.

Теорема 9. Дополнение *C*-кортежа $P = [P_1\ \ P_2\ \ \ldots\ \ P_{n-1}\ \ P_n]$ вычисляется как диагональная *C*-система $\overline{P} = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{P_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты *C*-кортежа *P*.

Рассмотрим, как можно в Примере 1 преобразовать ложную Подсказку 2 в истинную. Для этого с помощью Теоремы 9 вычислим ее дополнение.

$$\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \\ * & * & \varnothing \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что третий *C*-кортеж в матрице содержит пустую компоненту и поэтому равен пустому множеству, можно записать окончательный результат:

$$\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix}.$$

Чтобы решить Пример 1, потребуется еще одна теорема АК.

Теорема 7 (пересечение *C*-кортежа и *C*-системы). Пусть даны однотипные *C*-кортеж *P* и *C*-система *Q*. Результатом их пересечения будет *C*-система, содержащая все непустые пересечения *C*-кортежа *P* с каждым *C*-кортежем из *Q*.

Истинные подсказки Примера 1, также как и посылки во многих логических задачах, являются своеобразными ограничениями. Чтобы учесть все эти ограничения, необходимо вычислить их пересечение. Тогда, используя Теорему 7, получим

$$M_1[C_1C_2C_3] \cap \overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = [*\ \{К, П\}\ \{К, З\}] \cap$$
$$\cap \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix} = [\{П\}\ \{К, П\}\ \{К, З\}].$$

Получился один *C*-кортеж, так как пересечение *C*-кортежей $[*\ \{К, П\}\ \{К, З\}]$ и $[*\ \{З\}\ *]$ в соответствии с Теоремами 2 и 3 равно пустому множеству.

Для решения задачи преобразуем полученный результат в множество обычных кортежей, вычислив ДП компонент полученного в результате вычислений *C*-кортежа.

$[\{П\}\ \{К, П\}\ \{К, З\}] = \{П\}\times\{К, П\}\times\{К, З\} =$
$= \{(П, К, К), (П, К, З), (П, П, К), (П, П, З)\}$.

По условиям задачи первый кортеж не подходит, так в соответствии с ним клад находится в двух пещерах, хотя должен быть только в одной. Кроме того, в этом кортеже ни в одной из пещер нет змей, что тоже не соответствует условиям задачи. Третий кортеж тоже не годится, так как в нем не предусмотрено присутствие змей хотя бы в одной пещере. Четвертый кортеж говорит об отсутствии клада во всех пещерах, что тоже не соответствует условиям задачи. Остается второй кортеж, в соответствии с которым клад находится во второй пещере.

Диагональную *C*-систему можно выразить более компактно с помощью определения нового типа АК-объекта.

D-кортеж – это отношение, равное диагональной *C*-системе и записанное как ограниченный перевернутыми квадратными скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, изображенную выше диагональную *C*-систему можно записать как *D*-кортеж: $Q[XYZ] =]A\ B\ C[$. Дополнение Подсказки 2 из Примера 7 тоже можно выразить как *D*-кортеж: $\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] =]\{П\}\ \ \{З\}\ \ \varnothing[$.

D-система есть отношение, равное пересечению однотипных *D*-кортежей и записанное как ограниченная перевернутыми квадратными скобками матрица компонент, в которой строками являются участвующие в операции *D*-кортежи.

Таким образом, определены все 4 типа АК-объектов. Примеры их использования в логическом анализе приведены в [5, 6].

Помимо операций алгебры множеств в АК определены операции с атрибутами, с помощью которых логические формулы с кванторами преобразуются в удобные для расчетов формулы алгебры кортежей.

Здесь мы рассмотрим две операции: добавление фиктивного атрибута (+*Atr*) и элиминация атрибута (–*Atr*).

Операция ***добавление фиктивного атрибута*** (+*Atr*) выполняется как включение имени нового атрибута *Atr* в схему отношения АК-объекта и соответствующего нового столбца с фиктивными компонентами – в матричное представление АК-объекта.

Например, пусть задана *C*-система $R_k[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}$. Тогда после добавления фиктивного атрибута *Y* в $R_k[XZ]$ получим *C*-систему $+Y(R_k[XZ]) = R_m[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$.

При выполнении операции +*Atr* в *C*-структуры добавляются фиктивные компоненты «*», а в *D*-структуры – фиктивные компоненты «∅».

Операция +*Atr* соответствует правилу обобщения (Gen) исчисления предикатов, которое выражается как "из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$" [3], где $\mathcal{B}$ – правильно построенная формула (ППФ) языка первого порядка. При этом в АК фиктивный атрибут добавляется только в том случае, если он отсутствует в схеме отношения данного АК-объекта. В исчислении предикатов это соответствует тому, что формула $\mathcal{B}$ в правиле вывода Gen не содержит свободной переменной x_i, и тем самым исключаются возможные ошибки, если правило Gen используется без ограничений.

Добавление фиктивного атрибута по сути не изменяет содержание отношения: если в АК-объекте $R_k[XZ]$ значение атрибута *Y* неизвестно, то оно также неизвестно и в АК-объекте $+Y(R_k[XZ]) = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$, так как в нем каждому сочетанию значений атрибутов *X* и *Z* соответствует множество всех значений атрибута *Y*. Поэтому вполне правомерно считать отношение с добавленными фиктивными атрибутами равносильным исходному отношению.

С учетом этого в АК вводятся ***обобщенные операции*** пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$), которые отличаются от обычных операций $\cap$ и $\cup$ тем, что перед их выполнением АК объекты с разными схемами отношений приводятся к одной схеме за счет добавления в соответствующие АК-объекты недостающих фиктивных атрибутов.

Аналогично определяются ***обобщенные отношения*** $=_G$ и $\subseteq_G$. Смысл их в том, что при проверке равенства или включения АК-объектов в случае, если у них разные схемы отношения, то они приводятся к одной схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов.

В АК предложен и обоснован новый метод ***проверки правильности следствия***, выраженный в виде следующей теоремы.

Теорема 35. Пусть заданы посылки $A_1, \ldots, A_n$ и предполагаемое следствие *B*, выраженные структурами АК. Тогда алгоритм проверки правильности следствия *B* для заданных посылок A_i заключается в вычислении обобщенных пересечений и проверке обобщенного включения:

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \qquad (1)$$

АК-объект, полученный в результате вычисления левой части этого выражения, называется в АК ***минимальным следствием***. Минимальное оно потому, что любое его строгое подмножество не является следствием.

Рассмотрим еще одну операцию с атрибутами.

Операция ***элиминации атрибута*** ($-Atr$) выполняется так: из схемы отношения удаляется соответствующий атрибут Atr, а из матричного представления АК – столбец соответствующий этому атрибуту.

Например, если задана C-система

$$R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}, \text{ то}$$

$$-Y(R[XYZ]) = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & * \end{bmatrix}.$$

Логический смысл этой операции, в отличите от операции $+Atr$, зависит от типа АК-объекта. Пусть задан АК-объект $Q[XYZ]$, и ему соответствует логическая формула $Q(x, y, z)$. Тогда:

– если $Q[XYZ]$ – C-кортеж или C-система, то $-Y(Q[XYZ])$ равносильно $\exists y(Q(x, y, z))$;
– если $Q[XYZ]$ – D-кортеж или D-система, то $-Y(Q[XYZ])$ равносильно $\forall y(Q(x, y, z))$.

Применение операции элиминации атрибута к C-кортежу или C-системе позволяет вычислить ***проекцию*** АК-объекта. С помощью проекций решается задача, которая до этого не решалась в математической логике, – задача вычисления следствий с заранее заданными свойствами [5, 6] или ***интересных следствий***.

Для иллюстрации возможностей АК рассмотрим пример.

Пример 2 [10]. Обосновать правильность следующего рассуждения: «Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Следовательно, ни один доктор не является знахарем».

Оказывается, для анализа этого, на первый взгляд, простого рассуждения требуются далеко не самые простые методы математической логики (формулировка задачи на языке исчисления предикатов, сведение к предваренной нормальной форме, алгоритм унификации и т. д.). Рассмотрим, как это делается в АК.

Обозначим множества P – множество пациентов, D – множество докторов, Q – множество знахарей, P_1 – некоторое непустое подмножество пациентов ($P_1 \subseteq P$), $L[XY]$ – отношение «x любит y», заданное как C-система. Пусть она нам неизвестна, но для анализа данного рассуждения это не имеет значения.

Тогда первую посылку можно выразить как C-кортеж:

$$A_1[XY] = [P_1 \;\; D]$$

(некоторые пациенты (P_1) любят всех докторов). Данная посылка интерпретируется как часть (т.е. подмножество) отношения $L[XY]$.

Вторая посылка означает, что из отношения $L[XY]$ надо исключить кортежи, в которых значением атрибута X является пациент, а значением атрибута Y – некий знахарь. Сделать это можно с помощью следующей операции:

$$A_2[XY] = L[XY] \cap [P \quad \overline{Q}\,]$$

(при пересечении образуется C-система, в которой из атрибута X исключены все не пациенты, а из атрибута Y – все знахари).

Используя Теорему 2, вычисляем минимальное следствие:

$$A[XY] = A_1[XY] \cap A_2[XY] =$$
$$[P_1 \;\; D] \cap (L[XY] \cap [P \;\; \overline{Q}\,]) =$$
$$= L[XY] \cap [P_1 \;\; D \cap \overline{Q}\,].$$

Анализируем заключение. Предположим противное, т.е. что некоторые доктора – знахари, т.е. $D \cap Q = Q_D \neq \varnothing$. Тогда множество Q_D должно присутствовать в атрибуте Y отношения $L[XY]$. Это предположение можно использовать в качестве третьей посылки

$$A_3[XY] = [* \;\; Q_D].$$

Тогда, используя Теорему 2, получим:

$$A[XY] \cap [* \; Q_D] = (L[XY] \cap [P_1 \;\; D \cap \overline{Q}\,]) \cap$$
$$\cap [* \;\; Q_D] = L[XY] \cap [P_1 \;\; D \cap \overline{Q} \cap Q_1].$$

Поскольку $\overline{Q} \cap Q_D = \varnothing$, то $D \cap \overline{Q} \cap Q_D = \varnothing$ и тогда $[P_1 \;\; D \cap \overline{Q} \cap Q_D] = \varnothing$ (Теорема 3) , в силу чего $L[XY] \cap \varnothing = \varnothing$. В алгебре кортежей равенство пересечений посылок рассуждения пустому множеству означает противоречие. Отсюда ясно, что предположение о том, что некоторые доктора знахари, привело к противоречию. Таким образом, подтверждается следствие задачи.

Основные работы по алгебре кортежей имеются в свободном доступе в Интернете[1].

Расширение возможностей логического анализа в АК

Свойства АК позволяют решать такие задачи логического анализа, которые не предусмотрены в исчислении предикатов. К ним, в частности, относятся формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, вывод абдуктивных заключений, анализ пресуппозиций и элиминация аномалий противоречия в знаниях и др. [5, 6, 7]. Эти задачи можно встретить в публикациях по искусственному интеллекту, причем для их решения нередко используются неклассические логики. Здесь мы рассмотрим решение задачи вычисление следствий с заранее заданными свойствами. По сравнению с публикациями [5, 6, 8], в которых рассматривается решение этой задачи, здесь добавлены новые результаты исследований.

---

[1] http://logic-cor.narod.ru

Постановка задачи поиска интересных следствий предложена в статье [9]. В математической логике пока что не только не решена задача поиска новых следствий с заранее заданными свойствами, но даже нет ясности в том, какими свойствами должны характеризоваться такие следствия.

Многочисленные примеры задач логического вывода [3, 10, 11] характеризуются тем, что весьма часто проверяемые следствия содержат сравнительно небольшой, по сравнению с исходными данными, состав переменных. В задаче Steamroller [11] при формализации получается всего три логических переменных, но в ней сокращение осуществляется для предикатов, используемых в этой задаче. К этим предикатам относятся «волки», «лисы», «растения», «меньше» и т. д. Следствие этой задачи содержит три предиката, в то время как в посылках приведено 10 разных предикатов.

Таким образом, одно из свойств «интересных» следствий – *сокращенный по сравнению с исходными данными состав переменных или предикатов*.

Второе свойство интересных следствий тесно связано с первым: в некоторых случаях интерес представляют не только следствия с сокращенным составом переменных, но и следствия, в которых предусматривается использование заранее заданных переменных. Отсюда ясно, что вторым свойством «интересных» следствий является *определенный состав переменных или предикатов в сокращенном следствии*.

Еще одно свойство интересных следствий было установлено при исследовании задач с сокращенным составом переменных в следствии. Нередко результатом вычислений становится формула с большим объемом записей (например, C-система с большим числом C-кортежей). Спрашивается, можно ли сократить объем записи следствия, в частности, представить его в виде одного или двух дизъюнктов? Таким образом, третье свойство интересных следствий – *сокращенный объем его записи*.

Для решения задачи поиска интересных следствий, необходимо рассмотреть понятие проекции.

Проекцией АК-объекта называется результат однократного или многократного применения операции элиминации атрибута к АК-объекту, выраженному как C-кортеж или C-система. Если АК-объект выражен другими типами (D-кортеж или D-система), то его надо перед вычислением проекции преобразовать в C-систему с помощью соответствующих алгоритмов [5, 6] (здесь они не приведены).

Если, допустим, задана C-система $R[XYZ]$, то ее проекции обозначаются $\mathrm{Pr}_{XY}(R)$, $\mathrm{Pr}_{Y}(R)$ и т. д. В частности, проекция $\mathrm{Pr}_{XZ}(R)$ вычисляется с помощью элиминации атрибута Y:

$$\mathrm{Pr}_{XZ}(R) = -Y(R[XYZ]).$$

Рассмотрим весьма важную для вычисления интересных следствий теорему, доказательство которой отсутствует в цитируемых работах по АК.

Теорема о проекциях. Пусть задана C-система $R[\mathbf{W}]$, где $\mathbf{W}$ – множество атрибутов из схемы отношения R, и $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$. Тогда

$$R[\mathbf{W}] \subseteq_G \mathrm{Pr}_{\mathbf{V}}(R) \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть в множестве $\mathbf{W}$ содержится n атрибутов, а в множестве $\mathbf{V}$ – k атрибутов. Не нарушая общности, можно считать, что все атрибуты из $\mathbf{V}$ содержатся в левой части C-системы $R[\mathbf{W}]$ (перестановка столбцов в матричном представлении АК-объектов вместе с соответствующими перестановками имен атрибутов в схеме отношения является эквивалентным преобразованием). Пусть

$$R[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} C_1^1 & \dots & C_1^k & C_1^{k+1} & \dots & C_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^1 & \dots & C_m^k & C_m^{k+1} & \dots & C_m^n \end{bmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{Pr}_{\mathbf{V}}(R) = \begin{bmatrix} C_1^1 & \dots & C_1^k \\ \dots & \dots & \dots \\ C_m^1 & \dots & C_m^k \end{bmatrix}$. Для проверки соотношения (2) необходимо добавить в $\mathrm{Pr}_{\mathbf{V}}(R)$ недостающие фиктивные атрибуты. Тогда получим C-систему

$Q[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} C_1^1 & \dots & C_1^k & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^1 & \dots & C_m^k & * & \dots & * \end{bmatrix}$, равносильную $\mathrm{Pr}_{\mathbf{V}}(R)$, у которой правые $n–k$ столбцов содержат только полные компоненты. Если сравнивать C-кортежи C_i из $R[\mathbf{W}]$ и $Q[\mathbf{W}]$, то, используя Теорему 1, можно убедиться, что каждый C-кортеж из $R[\mathbf{W}]$ включен в соответствующий C-кортеж из $Q[\mathbf{W}]$, что доказывает теорему. *Конец доказательства*.

Из (1) и (2) следует, что *любая проекция АК-объекта является его следствием*. Отсюда ясно, что для получения следствия с сокращенным составом атрибутов из заданных посылок $A_1, A_2, \dots, A_n$. необходимо, используя (1), вычислить минимальное следствие, после чего вычислить его проекцию. При этом необходимо учитывать, что не каждая проекция представляет интересное следствие, так как некоторые проекции могут оказаться равными универсуму – в этом случае они не содержат полезной информации.

Рассмотрим задачу поиска следствий с заданным составом атрибутов. Эта задача решается также с помощью вычисления и анализа соответствующих проекций минимального следствия.

Пример 3. Пусть посылки заданы в виде следующих дизъюнктов:

$A_1 = \neg P \vee Q \vee R$; $A_2 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg S$;

$A_3 = \neg P \vee Q \vee \neg R \vee S$; $A_4 = P \vee \neg R$;

$A_5 = P \vee R \vee S$.

Требуется выяснить, может ли следствием данной задачи быть формула, содержащая только пропозициональные переменные P и Q (другой вариант: Q и S)?

В АК все задачи и формулы исчисления высказываний можно выразить АК-объектами, у которых атрибутами являются имена пропозициональных переменных, а в качестве их доменов используются множества {0,1}. При этом литералу X соответствует компонента {1}, а литералу $\neg X$ – компонента {0}. Тогда конъюнкт, например, $P \wedge \neg R \wedge S$ можно выразить как C-кортеж [{1} {0} {1}], а дизъюнкт

$A_2 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg S$

из условий Примера 3 – как D-кортеж

$A_2[PQS]$ =]{0} {0} {0}[.

Выразим посылки задачи в виде D-кортежей и, применяя операцию $+Atr$ для их приведения к одной схеме отношения, построим D-систему:

$$A[PQRS] = A_1[PQR] \cap_G A_2[PQS] \cap_G A_3[PQRS] \cap_G \cap_G A_4[PR] \cap_G A_5[PRS] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} & \varnothing \\ \{0\} & \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \{0\} & \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \varnothing & \{0\} & \varnothing \\ \{1\} & \varnothing & \{1\} & \{1\} \end{matrix}\right[.$$

Чтобы вычислять проекции D-системы, необходимо преобразовать ее в C-систему. Алгоритм такого преобразования содержится в [5, 6]. После вычислений получим минимальное следствие

$$A[PQRS] = \begin{bmatrix} \{0\} & * & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи рассмотрим сначала проекцию $Pr_{PQ}(A) = \begin{bmatrix} \{0\} & * \\ \{1\} & \{1\} \\ \{1\} & \{0\} \end{bmatrix}$. Эта проекция содержит 4 разных элементарных кортежа, что говорит о том, что она равна универсуму и не годится для следствия (универсум является следствием для любых посылок).

Для вычисления следствия с переменными Q и S рассмотрим проекцию $Pr_{QS}(A) = \begin{bmatrix} * & \{1\} \\ \{1\} & \{0\} \\ \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}$.

Она содержит три элементарных кортежа: [{0} {1}], [{1} {0}] и [{1} {1}]. По таблице истинности им соответствует формула $Q \vee S$. Следовательно, эта формула есть одно из возможных следствий задачи.

Рассмотрим задачу сокращения объемов записи в следствиях. При вычислении следствий могут получаться C-системы, содержащие значительное число C-кортежей. Сами C-системы во многих случаях трудно преобразовать так, чтобы в них содержалось меньшее число С-кортежей, однако объем записи минимального следствия или его неполных проекций можно существенно уменьшить.

Вкратце идея заключается в следующем. Пусть известно следствие A, выраженное как C-система с большим объемом записи. Тогда можно вычислить его дополнение $\overline{A}$ и выделить его часть $A_j \subseteq \overline{A}$ с малым объемом записи. При вычислении его дополнения методами АК также получится АК-объект $\overline{A_j}$ с малым объемом записи, и при этом в силу закона контрапозиции будет соблюдаться соотношение $A \subseteq \overline{A_j}$, что позволяет выбрать $\overline{A_j}$ в качестве искомого следствия. Рассмотрим пример.

Пример 4. Пусть следствием задачи, заданной в универсуме $\{a, b, c, d\}^3$ является C-система $A[KLM] = \begin{bmatrix} \{a,b & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix}$. Требуется вычислить следствие с сокращенным объемом записи.

Для решения задачи сначала вычислим дополнение $A[KLM]$. В соответствии с Теоремой 11 из [5, 6] дополнением C-системы является D-система той же размерности, у которой каждая компонента равна дополнению соответствующей компоненты исходной C-системы. С учетом этого $\overline{A}[KLM] = \left]\begin{matrix} \{c,d\} & \{a,b,c\} & \varnothing \\ \{a,b,d\} & \varnothing & \{a,b,d\} \\ \{a,b,c\} & \{a,b,c\} & \{a,b,d\} \end{matrix}\right[$.

Преобразуем полученную D-систему в C-систему с помощью соответствующего алгоритма из [5, 6]. В результате получим

$$\overline{A}[KLM] = \begin{bmatrix} \{d\} & \{a,b,c\} & * \\ \{d\} & \{d\} & \{a,b,d\} \\ \{c\} & * & \{a,b,d\} \\ \{a,b\} & \{a,b,c\} & * \end{bmatrix}.$$

Выберем из этой С-системы какой-либо C-кортеж, например, $A_j[KLM]$ = [{d} {a, b, c} $*$] и вычислим его дополнение

$\overline{A_j}[KLM]$ =]{a, b, c} {d} $\varnothing$ [.

В полученном D-кортеже можно удалить фиктивный атрибут. Тогда получим следующий результат: D-кортеж $\overline{A_j}[KL]$ =]{a, b, c} {d}[является следствием нашей задачи.

Полученный результат легко проверяется.

Для этого достаточно проверить соотношение

$A[KLM] \subseteq \overline{A_j}\,[KLM]$.

Для проверки можно воспользоваться следующей теоремой из [5, 6].

Терема 20. (проверка включения C-кортежа в D-кортеж). Пусть даны однотипные C-кортеж $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и D-кортеж $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N[$. Тогда $P \subseteq Q$, если хотя бы для одной пары компонент (P_j, Q_j) соблюдается $P_j \subseteq Q_j$.

Используя эту теорему, нетрудно убедиться, что каждый C-кортеж из $A[KLM]$ включен в D-кортеж $\overline{A_j}\,[KLM]$.

Таким образом, одним из возможных методов сокращения объема записи следствия A является следующий порядок действий:

1) вычислить дополнение A и преобразовать его в C-систему;

2) если в полученной C-системе много C-кортежей, то удалить некоторые из них;

3) вычислить дополнение структуры, полученной на предыдущем шаге.

Нерешенные проблемы

Важно отметить, что исследования по алгебре кортежей не являются завершенными, так как многие результаты математической логики пока что не представлены в ней. К ним, в частности, относятся следующие.

1. Задача Steamroller (номер 47 в [11]), которая выражается на языке исчисления предикатов, является иллюстрацией сложности логического вывода. Предполагается, что ее формулировка на языке алгебры кортежей позволит упростить ее решение. Однако до настоящего времени такая формулировка не найдена. Также отсутствует обоснование того, что этого нельзя сделать.

2. Не рассмотрена интерпретация и область ее применения для функциональных символов.

3. Не исследована возможность интерпретации исчисления предикатов второго порядка.

4. Не исследована возможность замены универсума Эрбрана [10] более простым вариантом на основе алгебры кортежей.

5. Не исследована возможность интерпретации теоремы Геделя о неполноте [3].

Список можно продолжить.

Заключение

С помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы логического анализа, такие как формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях, вывод абдуктивных заключений, анализ пресуппозиций и т.д. В то же время эти задачи решаются с помощью алгебры кортежей [5, 6, 7].

Средствами исчисления предикатов можно решать лишь часть задач дедуктивного анализа, т.е. поиск доказательств теорем, в случае если их формулировки известны. Однако задача поиска следствий с заранее заданными свойствами в этой системе не решается, что стало возможным с помощью алгебры кортежей [5, 6, 8].

Нерешенные проблемы лишь показывает, что данная система находится в стадии развития.

Благодарности

Данная работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121112500304-4).

Литература

1. Бурбаки, Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.

2. Курант, Р., Роббинс, Г. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с.

3. Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. – Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). – 499 pp.

4. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

5. Кулик, Б. А. Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа. – СПб.: Политехника, 2020. – 141 с.

6. Kulik, B., Fridman, A. Complicated Methods of Logical Analysis Based on Simple Mathematics. – Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing. 2022. – 195 p.

7. Кулик, Б. А. Исследование противоречий в естественных рассуждениях на примерах метафор и пресуппозиций // Труды Семнадцатой Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ-2019 (21–25 октября 2019 г., г. Ульяновск, Россия). – Ульяновск: УлГТУ, 2019. Т. 2. – С. 192-200.

8. Кулик, Б. А. Вывод следствий с предварительно заданными свойствами // Системный анализ в проектировании и управлении. Материалы XXV Международной научной и учебно-практической конференции, 13-14 октября 2021 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. Часть 2. – С. 89-97.

9. Шалак, В. И. Анализ vs дедукция // Логические исследования. – 2018. т. 24, № 1. – С.

26-45.

10. Чень, Ч., Ли, Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука. 1983. – 360 с.

11. Pelletier, F. Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning. – 1984. vol. 2. – Pp. 191–216.

12. Кулик, Б. А. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний / Б. А. Кулик, А. А. Зуенко, А. Я. Фридман. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 235 с.

Кулик Б.А. Расширение возможностей логического анализа за счет уточнения интерпретации исчисления предикатов. *Одним из вариантов интерпретации исчисления предикатов является представление предикатов и логических формул в виде отношения, в котором областью истинности (domain) всех переменных является одно и то же множество. В эту интерпретацию внесены следующие изменения: 1) разным переменным соответствуют разные области их изменения; 2) n-местные отношения представлены не как множества кортежей значений переменных, а как объединения декартовых произведений. Обосновано, что математической моделью измененной интерпретации является алгебра кортежей. Такое изменение интерпретации позволяет существенно расширить аналитические возможности логического анализа, в частности, решить задачу вычисления следствий с заданными свойствами.*

Ключевые слова: *интерпретация, логический анализ, аксиоматический подход, математическая логика, теория множеств, алгебра множеств, алгебра кортежей*.

Kulik B. A. Expanding the possibilities of logical analysis by clarifying the interpretation of predicate calculus. *One of the variants of interpretation of predicate calculus is the representation of predicates and logical formulas in the form of a relation in which the domain of all variables is the same set. The following changes have been made to this interpretation: 1) different variables correspond to differ*ent their domains; 2) *n-place relations are represented not as sets of tuples of variable values, but as unions of Cartesian products. It is proved that the mathematical model of the modified interpretation is the* n-tuple algebra*. Such a change in interpretation makes it possible to significantly expand the analytical capabilities of logical analysis, in particular, to solve the problem of calculating consequences with specified properties.*

Key words: *interpretation, logical analysis, axiomatic approach, mathematical logic, set theory, algebra of sets, n-tuple algebra*

Статья поступила в редакцию 25.11.2022
Рекомендуется к публикации профессором Зори С. В.