

Л. П. Вовк, д-р техн. наук, Е. С. Кисель, канд. физ.-мат. наук

Автомобильно-дорожный институт (филиал)  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Донецкий национальный технический университет»  
в г. Горловка

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЛНОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ДЕТАЛЕЙ

*В работе проанализированы особенности динамического напряженного состояния кусочно-неоднородной трехмерной призматической детали на резонансных вибрационных режимах нагружения. В рамках конечно-элементного анализа проведено исследование спектра резонансных частот и собственных форм колебаний в зависимости от упругих и геометрических параметров детали.*

*Ключевые слова:* волновые характеристики, локальные краевые эффекты, собственные частоты и формы колебаний, сингулярные зоны, толщинный резонанс, метод конечных элементов

### **Введение**

Наиболее опасным для прочности деталей автомобиля (в частности трансмиссии) является резонанс колебаний, который появляется, если частота хотя бы одного из периодических возбуждающих моментов становится такой же, как собственная. Предупреждение вредных последствий резонансных явлений является важной научно-технической задачей. При этом усложненные физико-механические характеристики не дают возможность провести расчет собственных частот аналитически. Анализ спектра частот существенно усложняется в случае неоднородности материала детали. Возникающая локальная концентрация напряжений в сингулярных зонах неоднородной области на границах раздела сред с различными упругими характеристиками требует разработки уточненной методики расчета, что позволит избежать резонансных явлений при виброэксплуатации неоднородных ограниченных деталей и правильно подобрать рабочие режимы виброн нагружения. Актуальным является и вопрос выбора геометрических и конструктивных параметров деформируемой детали. Решение этих проблем существенно повысит сроки эксплуатации и надежность деталей машиностроения и элементов конструкций.

В современных практических приложениях автомобилестроения наблюдается повсеместное использование функционально-градиентных неоднородных и кусочно-неоднородных материалов. Спектр собственных частот таких материалов существенно отличается от соответствующих спектров частот для однородных материалов. Уже на уровне анализа спектра частот однородной области можно сделать некоторые выводы о наличии краевых динамических эффектов в окрестности резонансных частот, важнейшим из которых является краевой резонанс [1, 2]. Картина распределения локальных зон концентрации напряжений в неоднородном и особенно в кусочно-неоднородном теле существенно усложняется и зависит от частотного параметра виброн нагружения [2].

В данной работе в качестве объекта исследования выбрана трехмерная упругая кусочно-неоднородная деталь с особыми зонами концентрации напряжений в угловых точках области и на внутренних поверхностях раздела сред с различными механическими характеристиками. Это обусловлено, во-первых, независимостью характера локальной концентрации напряжений от геометрии стыкуемых областей [3] и, во-вторых, повсеместным использованием подобных элементов с высокими прочностными характеристиками в технике [4, 5].

Исследование спектра собственных частот для однородных балок с прямоугольным поперечным сечением не представляет особых затруднений и может быть выполнено по

различным методикам [3–6]. Однако не представляется возможности использовать эти результаты ни для прогнозирования времени работы таких элементов, ни, тем более, для уточненного анализа динамических характеристик волнового поля при режимах работы, близких к резонансным.

Вычисление собственных частот и анализ собственных форм колебаний в зависимости от различных усложненных разрывных физико-механических характеристик объекта представляет несомненный практический и научный интерес. При этом необходим анализ изменения механических характеристик волнового поля в пределах изменения упругих и геометрических параметров исследуемой области.

### ***Цель работы***

Цель данной работы – качественный и количественный пространственный анализ математических и механических характеристик волнового поля. Объект исследования – ограниченная трехмерная призматическая кусочно-неоднородная деталь с характерными зонами локальной концентрации напряжений. Основной задачей является исследование спектра собственных частот и собственных форм колебаний в окрестности нерегулярных точек границы области и на внутренней границе раздела областей в зависимости от геометрии и упругих параметров стыкуемых областей. В статье поставлены и решены следующие задачи:

1. Создание методики численного расчета спектра резонансных частот в программном комплексе ANSYS. Численное исследование проводится для детали, не имеющей начальных напряжений.
2. Определение динамических характеристик напряженно-деформированного состояния при установившихся колебаниях исследуемой составной детали.
3. Численный сравнительный анализ локальных характеристик волнового поля на различных резонансных частотах с целью определения наиболее опасных с точки зрения прочности собственных частот.
4. Исследование влияния геометрии стыкуемых областей на характер локальной концентрации напряжений.
5. Формулировка выводов проведенного анализа и перспектив дальнейших исследований.

### ***Постановка задачи и численное исследование***

Первым этапом исследования является определение и анализ спектра резонансных частот тела, состоящего из трех состыкованных однородных призматических трехмерных областей с различными упругими параметрами (рисунок 1).

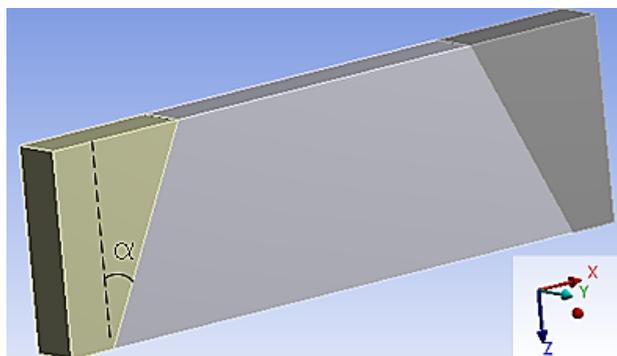


Рисунок 1 – Геометрия области

Численный анализ спектра частот основан на компьютерном моделировании и последующем модальном анализе в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical 2019 R2. В

данной работе приведен расчет свободных колебаний без учета предварительных напряжений.

Материал внешних наплавов областей – конструкционная сталь (Structural Steel), материал внутренней области – магний. Они соответственно представлены в библиотеке материалов программного комплекса. Тестовая модель внутренней области представляет собой прямоугольную пластину, линейный размер которой по оси  $x$  равен 0,22 м, по оси  $z$  – 0,08 м. Ширина внешних областей при  $\alpha = 0^\circ$  – 0,02 м и в численном исследовании при изменении  $\alpha$  может варьироваться, в связи с чем форма наплавов будет трапецией. Толщина призмы  $h$  изменяется в пределах от 0,001 м до 0,03 м.

При численном анализе определялись первые 14 собственных частот и собственных форм колебаний. Форма стыковки внутренней области и наплавов – жесткое сцепление. Граница контакта предполагалась гладкой. При исследовании волновых характеристик никакие условия закрепления на призматическую область не накладывались. Поскольку при таких условиях данная область имеет шесть степеней свободы (три линейные и три угловые), то первые шесть собственных («твердотельных») форм игнорировались. Данные формы не имеют физического смысла при установившихся колебаниях.

На рисунке 2 представлена зависимость значений найденных резонансных частот от толщины призмы при  $\alpha = 0$ . Если увеличивать толщину призматической области от 0,001 м до 0,03 м, то масса всего тела увеличивается и значения собственных частот растут. На рисунке 2 отчетливо видно, что скорость увеличения значения резонансной частоты растет в зависимости от ее номера. Начиная от значения толщины где  $h \approx 9 \cdot 10^{-3}$  м, появляется постоянная частота, не изменяющаяся с дальнейшим увеличением толщины  $\omega_r \approx 3100$  Гц, которую можно считать частотой толщинного краевого резонанса и которая не зависит от толщины [7, 8]. Номер частоты  $\omega_r$  уменьшается с ростом значения  $h$  (линия 1 на рисунке 2). С дальнейшим ростом толщины имеем еще одну такую более высокую частоту (линия 2 на рисунке 2). Как показали дальнейшие расчеты, динамические краевые эффекты на этой частоте выражены гораздо слабее.

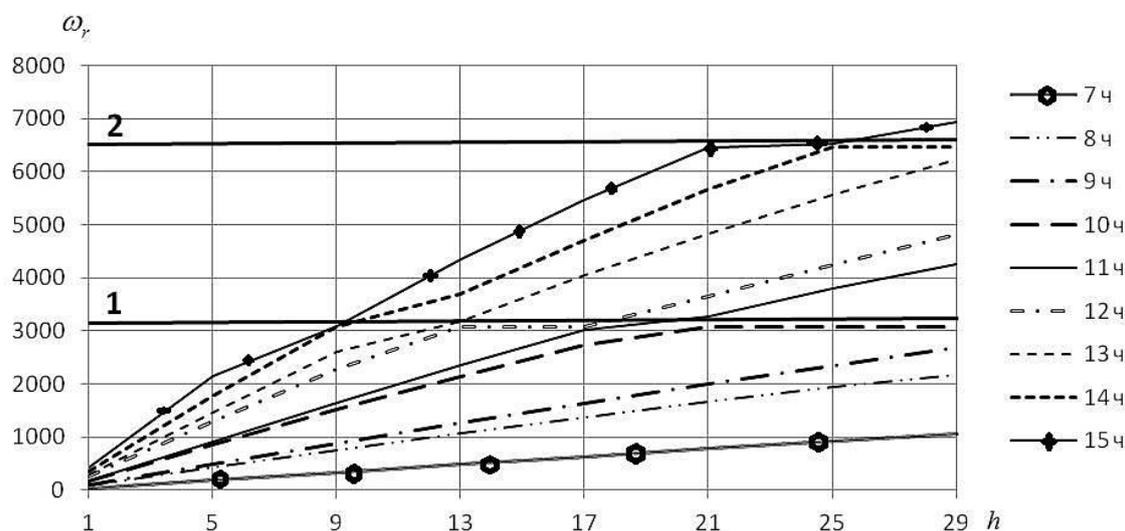


Рисунок 2 – Спектр собственных частот в зависимости от толщины призмы

Наиболее действенным способом предотвращения разрушения конструкций при резонансе является выбор режима вибрационной нагрузки и геометрии тела, собственная частота колебаний которой отличается от ее рабочей частоты. Наиболее актуален этот вывод для первых собственных форм и, особенно, для собственной формы колебаний на частоте краевого резонанса.

Поэтому представляется интересным качественный и количественный анализ распределения характеристик волнового поля в сингулярных зонах границы тела и в окрестности внутренних поверхностей раздела.

Результаты численного анализа для кусочно-неоднородной трехмерной призмы представлены на рисунках 3–6, где изображены эпюры изменения собственных напряжений  $\sigma_x$  на внешней границе тела на различных собственных частотах при  $\alpha = 20^\circ$ .

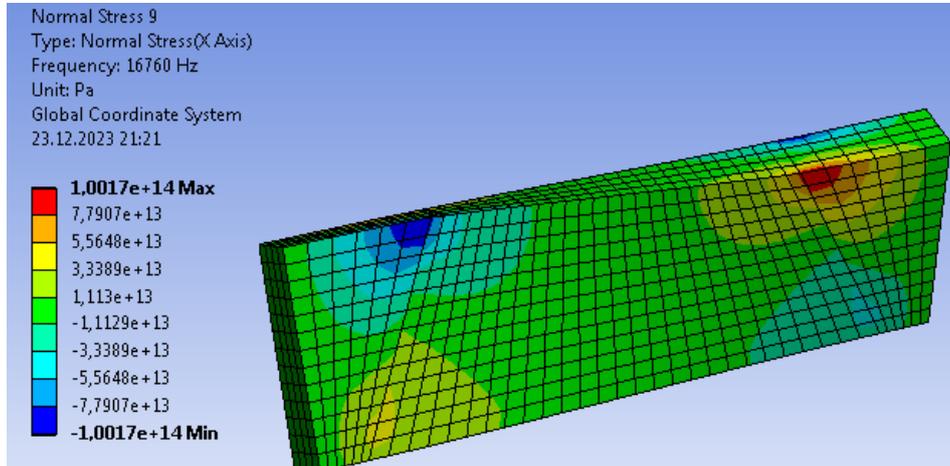


Рисунок 3 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 3-й собственной частоте

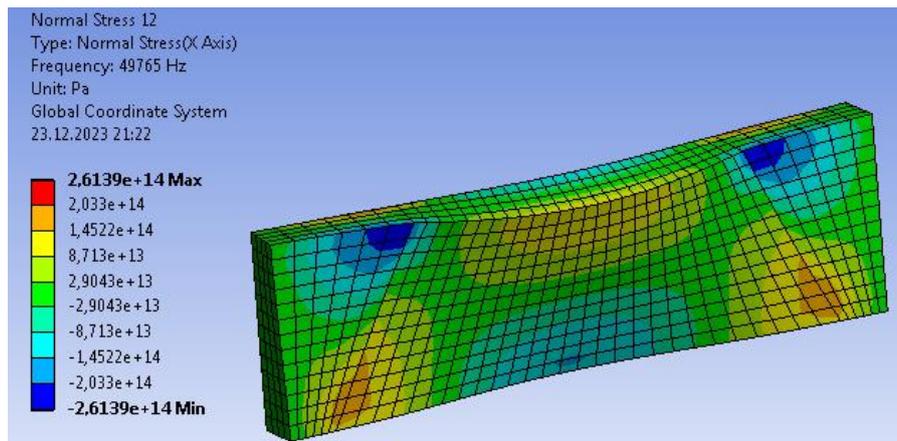


Рисунок 4 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 6-й собственной частоте

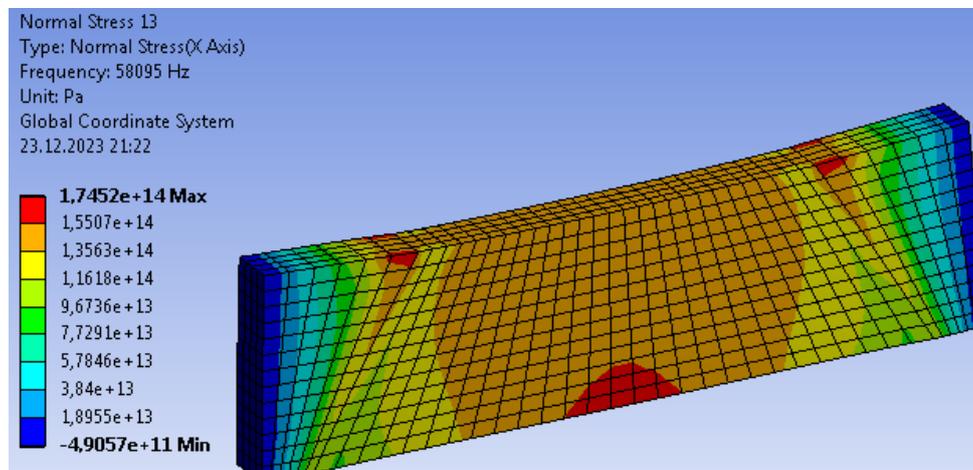


Рисунок 5 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте

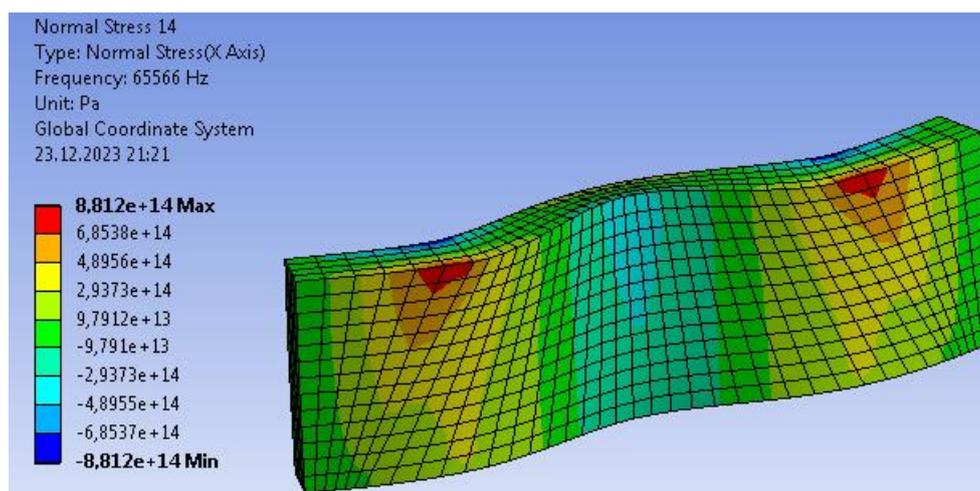


Рисунок 6 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 8-й собственной частоте

Распределение напряжений существенно зависит от номера собственной частоты. Если на третьей собственной частоте практически отсутствуют зоны локальной концентрации напряжений, то уже на шестой эти зоны ярко выражены (локальные напряжения увеличиваются в 2,5 раза). Прочностной расчет на этой частоте обязательно должен учитывать максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений в зоне концентраторов напряжений. Практически на всех частотах имеем несколько зон концентрации напряжений, для которых обычные теории прочности не применимы. Если проанализировать данные представленных рисунков, можно сделать вывод, что, если не учитывать локальную концентрацию напряжений, ошибка может достигать 800 %!

Следует отметить, что с увеличением толщины призмы локальные и краевые динамические эффекты затухают. Это можно объяснить следствием общего увеличения массы тела. Однако, даже при большой массе тела локальные динамические эффекты не пропадают. Особенно явно это прослеживается на частотах краевого резонанса.

Следующий этап численного анализа связан с влиянием геометрии стыкуемых областей, а именно угла асимметрии  $\alpha$  на величину и характер распределения локальных напряжений. На рисунках 7–8 представлено распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha = 20^\circ$  и  $\alpha = 50^\circ$ .

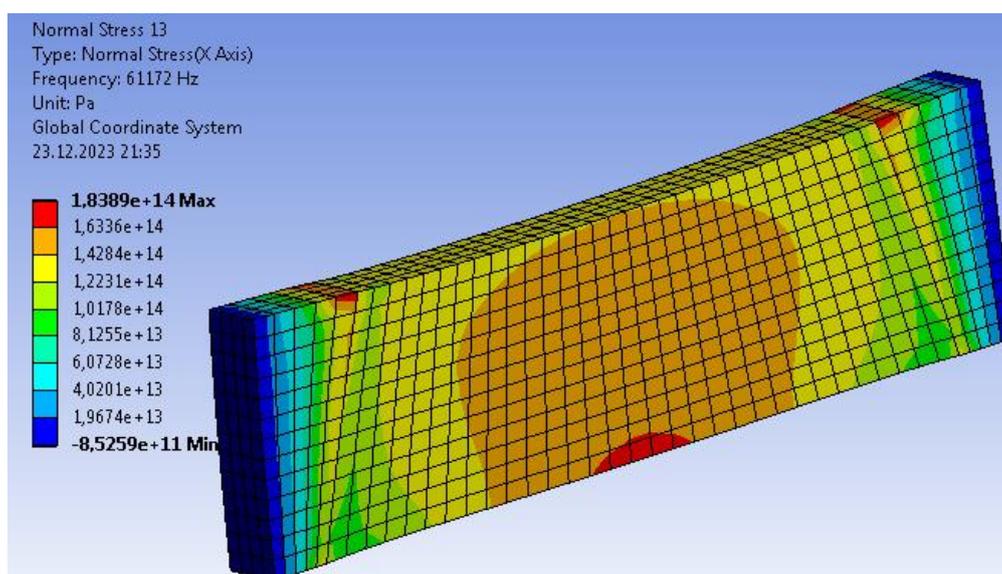


Рисунок 7 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha = 20^\circ$

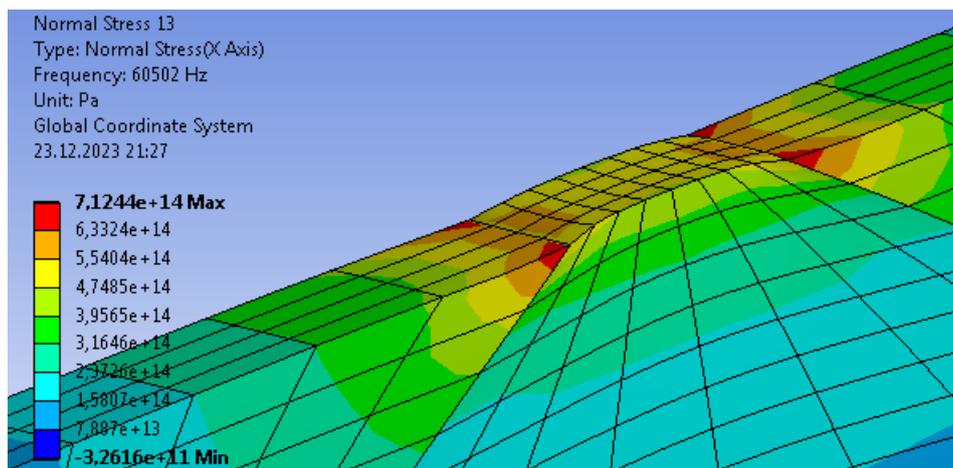


Рисунок 8 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha = 50^\circ$

При увеличении значения угла  $\alpha$  на некоторых частотах наблюдается ярко выраженная концентрация напряжений на внешней границе наплавки и на внешних вершинах области, что так же следует рассматривать как повод для конструктивных изменений подобных неоднородных элементов конструкций.

Из данных на представленных рисунках следует, что с увеличением значения  $\alpha$  и соответственно с увеличением массы наплавки интенсивность локальной концентрации напряжений существенно увеличивается. Рост максимальных напряжений наблюдается в 7 раз. Это нужно обязательно учитывать при проектировании неоднородных элементов конструкций.

При больших значениях  $\alpha$  наблюдается существенная концентрация напряжений по толщине области. На рисунке 9 представлено распределение поля напряжений  $\sigma_x$  на торце трехмерной области при  $\alpha = 60^\circ$  и частоте краевого резонанса  $\omega = 66041$  Гц. Сжимающие напряжения достигают на этой частоте своего максимального значения, значительно превышающего соответствующие значения на всем рассматриваемом частотном диапазоне. При малых значениях  $\alpha$  и на других резонансных частотах этот эффект отсутствует.

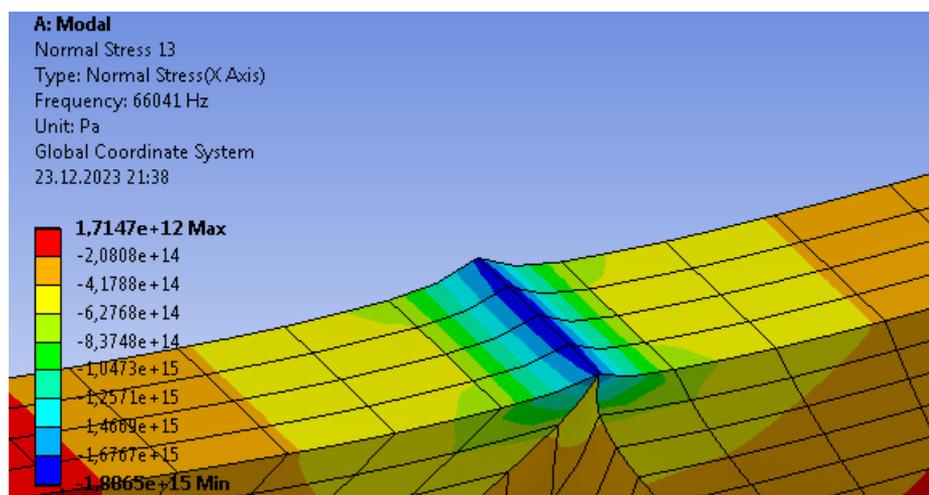


Рисунок 9 – Распределение напряжений  $\sigma_x$  на 7-й собственной частоте при  $\alpha = 60^\circ$

### **Выводы**

По данному исследованию справедливы следующие выводы:

1. С ростом толщины призматической детали имеем рост значений резонансных частот. Скорость роста значений частот возрастает с ростом номера собственной частоты.

2. На спектре частот, начиная с некоторого значения толщины, появляются частоты краевого резонанса, характеризующиеся появлением плато в спектральной области. Это является причиной появления пограничных эффектов при установившихся колебаниях области.

3. Характер динамического напряженно-деформированного состояния существенно зависит от номера собственной частоты. С увеличением номера собственной частоты интенсивность локальной концентрации напряжений увеличивается. Но на высоких частотах локальные динамические эффекты затухают.

4. При увеличении массы наплавки и угла асимметрии области увеличивается интенсивность локальной концентрации напряжений, и появляются зоны интенсивности на торце области.

Представленный модальный анализ свободных колебаний кусочно-неоднородной упругой призматической области является первым этапом динамического анализа, т. к. на его основе можно проводить анализ вынужденных колебаний и нестационарных задач.

В качестве перспектив дальнейших исследований можно предложить следующие направления исследования:

1. Изменение геометрии стыкуемых областей. Переход к анализу свободных колебаний несимметричных кусочно-неоднородных областей.

2. Рассмотрение различных сочетаний упругих параметров наплавки и внутренней области, что, конечно, скажется на величине интенсивности локальной концентрации напряжений. Возможно рассмотрение колебаний области, состоящей из трех состыкованных призматических тел, каждое из которых имеет разные упругие характеристики.

3. Одним из направлений исследования может стать рассмотрение наплавки или внутренней области, выполненных из функционально-градиентных материалов.

4. Анализ собственных форм при таком значении угла асимметрии, при котором наплавки сойдутся. В этом случае будем иметь стык трех областей. Анализ напряженного состояния в такой сингулярной точке, несомненно, представляет теоретический и практический интерес.

### ***Список литературы***

1. Ватульян, А. О. Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе / А. О. Ватульян, В. О. Юров // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 2. – С. 119–127.
2. Вовк, Л. П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк. – Донецк : Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
3. Вовк, Л. П. Анализ спектра резонансных частот неоднородной упругой призматической детали с учетом ее толщины / Л. П. Вовк, Е. С. Кисель, И. В. Даниленко // Вести Автомобильно-дорожного института = Bulletin of the Automobile and Highway Institute. – 2020. – № 3(34). – С. 20–26.
4. Глушков, Е. В. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. А. Евдокимов // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 3–12.
5. Быков, В. Г. Прохождение через резонанс статически неуравновешенного ротора с «неидеальным» автобалансирующим устройством / В. Г. Быков, А. С. Ковачев // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4(62), вып. 4. – С. 671–680.
6. Вильде, М. В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М. В. Вильде, Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович. – Москва : Физматлит, 2010. – 280 с. – ISBN 978-5-9221-1280-2.
7. Laser-generated Rayleigh wave for width gauging of subsurface lateral rectangular defects / Chuanyong Wang, Anyu Sun, Xiaoyu Yang [et al.] // Journal of Applied Physics. – 2018. – № 124(6) – P. 124–130.
8. Sinclair, G. B. Stress singularities in classical elasticity-I: Removal, interpretation and analysis / G. B. Sinclair // Applied Mechanics Reviews. – 2004. – Vol. 57, № 4. – P. 251–297.

*Л. П. Вовк, Е. С. Кисель*  
*Автомобильно-дорожный институт (филиал)*  
*федерального государственного бюджетного образовательного учреждения*  
*высшего образования «Донецкий национальный технический университет» в г. Горловка*  
**Пространственный анализ резонансных волновых характеристик**  
**кусочно-неоднородных деталей**

Динамической конечно-элементной модели принадлежит ключевая роль в решении комплексной задачи обеспечения вибропрочности конструкции изделия. Современная вычислительная техника, программные продукты, испытательно-измерительные комплексы позволяют создать подробную модель конструкции изделия, а на основе эксперимента отстроить и подтвердить ее достоверность. Решение данных задач возможно в современных системах конечно-элементного анализа. Программа ANSYS является одной из самых универсальных, развивающихся и популярных систем конечно-элементного анализа у специалистов, занимающихся автоматизированными инженерными расчетами (CAE, Computer-Aided Engineering). Конечно-элементная модель автомобильной детали является надежным инструментом анализа прочности изделия при изменении условий его эксплуатации, изменениях его конструкции, а также при создании новых изделий подобного класса. Методологическая ценность данного исследования заключается в разработке алгоритма исследования спектра собственных частот и собственных форм колебаний трехмерной призматической детали в окрестности нерегулярных точек границы области и на внутренней границе раздела областей в зависимости от геометрии и упругих параметров стыкуемых областей. Практический интерес представляет качественный и количественный пространственный анализ математических и механических характеристик волнового поля, а также их влияние на прочностные изменения в призматической детали. Объект исследования – кусочно-неоднородная трехмерная призма. При построении алгоритма, в основу расчета определения собственных частот и форм (мод) собственных колебаний проушины положен модальный анализ (определение собственных частот и форм (мод) собственных колебаний). Поставленная задача решалась методом конечных элементов в пакете ANSYS. Метод решения и проведенный модальный анализ помогли установить параметры колебаний призматической детали: было проведено исследование спектра резонансных частот и собственных форм колебаний в зависимости от упругих и геометрических параметров детали определены собственные частоты и формы колебаний. Используя данную методику можно предотвращать возникновение опасных напряжений в конструкциях путем моделирования мероприятий по устранению резонансных частот в модели исследуемой автомобильной детали.

ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ, СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ, СИНГУЛЯРНЫЕ ЗОНЫ, ТОЛЩИННЫЙ РЕЗОНАНС, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*L. P. Vovk, E. S. Kisel*  
*Automobile and Road Institute (Branch) of the Federal State Budget Educational Institution*  
*of Higher Education «Donetsk National Technical University» in Gorlovka*  
**Spatial Analysis of Resonant Wave Characteristics of Piecewise Inhomogeneous Parts**

The dynamic finite element model plays a key role in solving the complex problem of ensuring the vibration strength of a product structure. Modern computer technology, software products, and testing and measuring systems make it possible to create a detailed model of the product design, and, based on experiment, to build and confirm its accuracy. The solution of these problems is possible in modern finite element analysis systems. The ANSYS program is one of the most universal, developing and popular finite element analysis systems among specialists involved in automated engineering calculations (CAE, Computer-Aided Engineering). The finite element model of an automobile part is a reliable tool for analyzing the strength of a product when its operating conditions change, changes in its design, as well as when creating new products of a similar class. The methodological value of this study lies in the development of an algorithm for studying the spectrum of natural frequencies and natural vibration modes of a three-dimensional prismatic part in the vicinity of irregular points of the domain boundary and at the internal interface of the domains, depending on the geometry and elastic parameters of the joined domains. The qualitative and quantitative spatial analysis of the mathematical and mechanical characteristics of the wave field, as well as their influence on strength changes in a prismatic part is of practical interest. The object of study is a piecewise inhomogeneous three-dimensional prism. When constructing the algorithm, the basis for calculating the determination of natural frequencies and modes (modes) of natural vibrations of the eyelet is based on modal analysis (determining natural frequencies and modes of natural vibrations). The problem was solved using the finite element method in the ANSYS package. The solution method and the conducted modal analysis helped to establish the vibration parameters of the prismatic part: a study was carried out on the spectrum of resonant frequencies and natural modes of vibration depending on the elastic and geometric parameters of the part; the natural frequencies and modes of vibration were determined. Using this technique, it is possible to prevent the

occurrence of dangerous stresses in structures by modeling measures to eliminate resonant frequencies in a model of the automotive part under study.

WAVE CHARACTERISTICS, LOCAL EDGE EFFECTS, NATURAL FREQUENCIES AND VIBRATION FORMS, SINGULAR ZONES, THICKNESS RESONANCE, FINITE ELEMENT METHOD

**Сведения об авторах:**

**Л. П. Вовк**

SPIN-код РИНЦ: 9860-6682  
Телефон: +7 949 301-98-55  
Эл. почта: leonidvovk166@gmail.com

**Е. С. Кисель**

SPIN-код РИНЦ: 7676-8943  
Телефон: +7 949 443-74-77  
Эл. почта: e.s.kisel@gmail.com

*Статья поступила 11.01.2024*

*© Л. П. Вовк, Е. С. Кисель, 2024*

*Рецензент: Е. П. Мельникова, д-р техн. наук, проф.,  
Автомобильно-дорожный институт  
(филиал) ДонНТУ в г. Горловка*