

УДК 517.165+517.5

## Неравенства в комплексной области и гипотеза Римана

З. Е. Филер

д.т.н., к.ф.-м.н., профессор, г. Нетания, Израиль

[zalmenfilier3319@gmail.com](mailto:zalmenfilier3319@gmail.com)

### Аннотация

Рассматривается знак  $\zeta(z)$  функции в точках критической полосы. Используется представление об упорядочении в области комплексных чисел  $z_1 < z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$  и при  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$  с  $\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2)$ . Так как область, где  $\zeta(z) < 0$  вмещает подобласть, где  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , выделение последней может быть осуществлено на ПЭВМ. Точки пересечения грани областей  $\operatorname{Re}(z) < 0$  и  $\operatorname{Im}(z) < 0$  и являются корнями  $\zeta(z)$ . Отличие действительной части корня от  $1/2$  невозможно, так как корню  $z_1 < 1/2$  соответствует корень  $z_2 = 1 - z_1$  в этой же полосе. Но он будет лежать в полосе, где  $\zeta(z) > 0$ , а не равно нулю. Если же  $z_1 > 1/2$ , то  $1 - z_1$  будет лежать в области, где  $\zeta(z) < 0$ , что невозможно, если  $\zeta(z_2) = 0$ . Поэтому  $z_2 = z_1 = 1/2$ .

### Введение

Во время учёбы в 10-м классе вечерней школы в 1950-51 учебном году З. Филер познакомился с доказательством леммы Даламбера о существовании точки в окрестности точки, в которой модуль комплексной функции отличен от 0, где модуль меньше. Подумалось, что математики могут решать неравенства для комплексных функций, но это просто не изучают в школе. Но, учась в университете и затем преподавая в ВУЗах, он таких работ не нашёл. В 1999 г. он опубликовал работу [1], в которой содержалось представление о комплексных решениях неравенств, в частности квадратных. В 2003 г. это опубликовано в журнале [2]. Это было использовано в преподавании в курсе «Числовые системы». Он обнаружил позднее, что А. В. Кужель рассматривал такую возможность в [3], даже привёл пример линейного неравенства, но не указал ни метода, ни ответа. Филер вместе со своим учеником С.П. Ткаченко предложили использовать метод действительной невязки [3], но он не давал полной картины: область, где функция больше нуля вместе с областью, где она меньше нуля и корнями, не заполняла всю плоскость (рис. 1).

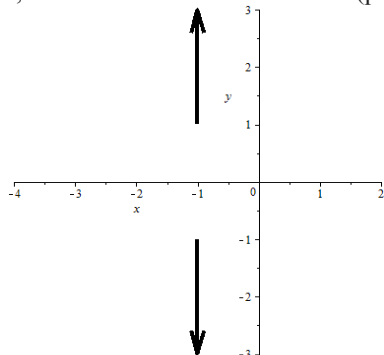


Рисунок 1 – Решение неравенства  $x^2 + 2x + 2 < 0$  с невязкой  $r \in \mathbb{R}$

Противоположное неравенство  $x^2 + 2x + 2 > 0$  имеет решение в форме креста вдоль оси абсцисс и куском прямой  $x = -1$  от точки  $(-1; -1)$  до точки  $(-1; 1)$ . Вместе с корнями функции  $x^2 + 2x + 2$  эти прямые не заполняют плоскость. Построенная методом комплексной невязки  $r = s + it$  область решений неравенств с корнями заполняют всю плоскость.

**Цель работы.** Использовать неравенства для поиска корней, в том числе для нетривиальных корней дзета-функции.

### Материалы и методы

На рис. 2 зелёным цветом показано решение, полученное методом действительной невязки, красным – корни, синим – область выполнения неравенства; белая часть плоскости решение противоположного неравенства, полученное методом комплексной невязки. «глубины» показаны оттенком синего цвета и «высоты» - другого.

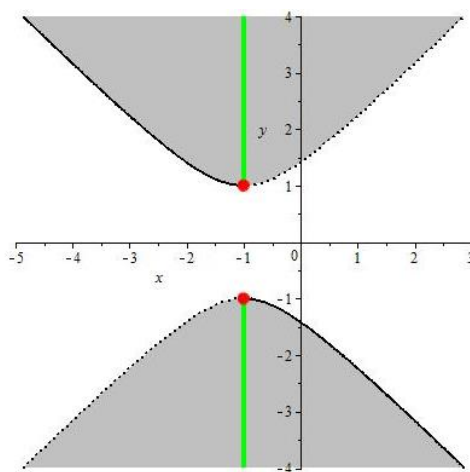


Рисунок 2 – Решение неравенства  $x^2 + 2x + 2 > 0$  с невязкой  $r \in \mathbb{C}$

Неравенство  $f(z) < 0$  равносильно уравнению  $f(z) + r = 0$  с параметром  $r > 0$ , неравенство  $f(z) > 0$  – уравнению  $f(z) - r = 0$ . Это даёт возможность рисовать график функции  $w = \text{Ref}(x+iy)$ , на котором будут выделяться «глубины» оттенком синего цвета и «высоты» – другого. Так построен график на рис. 3. Линия  $\text{Ref}(x+iy) = 0$  будет отделять «море» от «суши»; на ней будут находиться и корни функции  $f(x+iy) = 0$ . Их можно выделить, взяв пересечение областей, где лежат границы областей  $\text{Ref}(z) < 0$  и  $\text{Imf}(z) < 0$ . Хотелось бы найти простой способ изображения, как

средний рис.3. Рассмотрим картину для линейной функции  $w = az + b$  с комплексными значениями  $a, z$  и  $b$ . Она эквивалентна системе действительных функций  $w_1 = a_1x - a_2y + b_1$  и  $w_2 = a_2x + a_1y + b_2$ . Их графики при  $w = 0$  – взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в корне функции  $w$  (рис. 4). Область, в которой функция  $f(z) = (1-i)z - (3+2i) < 0$ , не закрашена. Корень – общая точка границы красной и синей областей, т.е. где  $\text{Ref}(z) > 0$  и  $\text{Imf}(z) > 0$  (она дважды закрашена).

На рис. 5 изображены области знакопостоянства функции  $z^2$ .

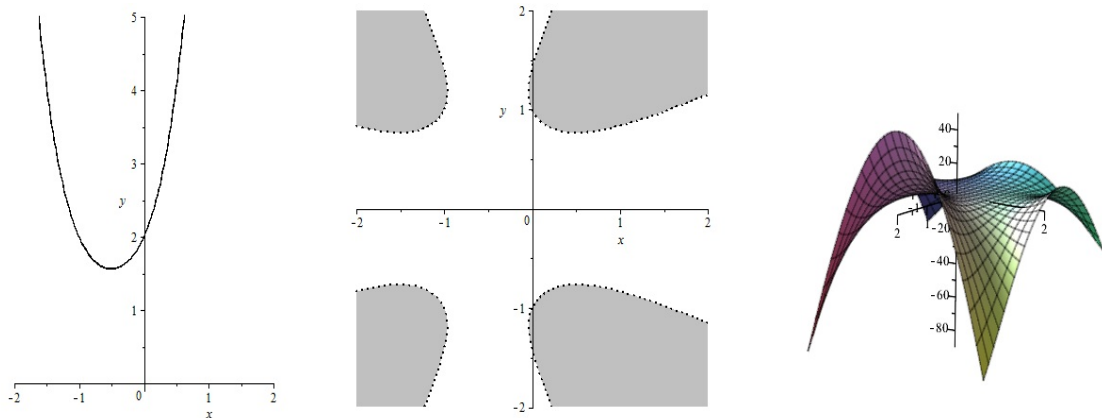


Рисунок 3 – Графики функции  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$  в  $R$ , где она больше 0; в  $C$ , где  $\text{Ref}(x+iy) < 0$ ; и функции  $w = \text{Ref}(x+iy)$

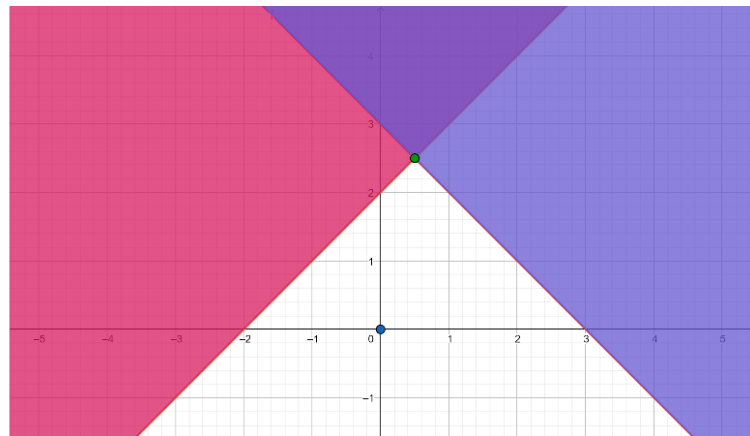


Рисунок 4 – Решение уравнения  $(1-i)z = 3+2i$  в  $C$

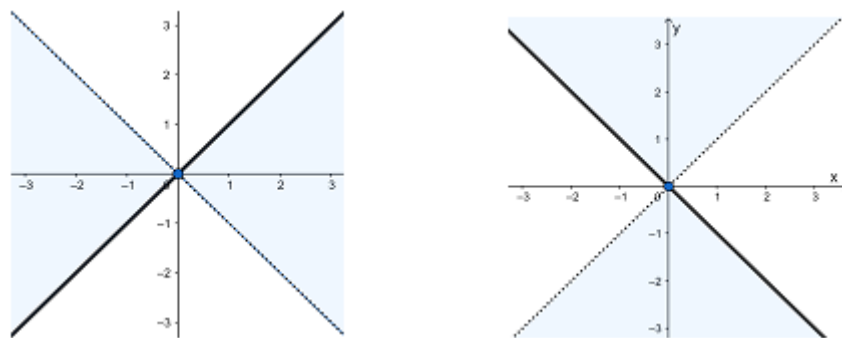


Рисунок 5 – Решения неравенств  $z^2 > 0$  (слева) и  $z^2 < 0$  (справа)

Корень этой функции - общая точка их границы  $z=0$ . Жирным выделена часть границы областей, принадлежащая к соответствующему решению. Объединение их вместе с точкой  $O$  – корнем, даёт всю комплексную плоскость.

**О корнях дзета-функции Римана**

Известно, что громадное множество «первых» её нетривиальных корней имеют действительную часть  $x=1/2$ . Ординаты корней лежат на последовательных листах многозначной обратной функции Римана. Представить их расположение на плоском листе можно с помощью рис. 6.

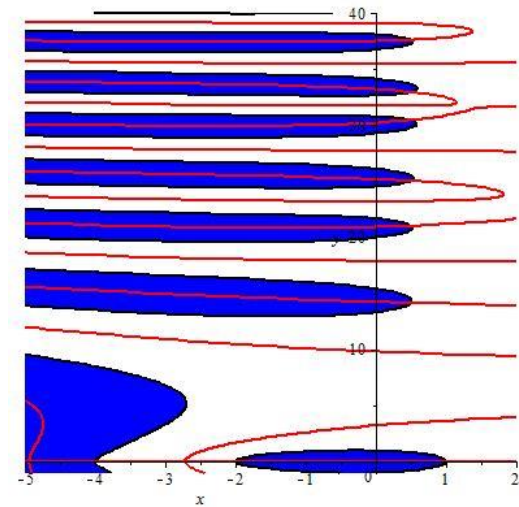


Рисунок 6 – Расположение корней

Все корни в полосе  $0 < x < 1, y > 14$  являются точки пересечения границ областей, где  $Re\zeta(z) < 0$  (синего цвета) с линиями  $Im\zeta(z) = 0$  (коричневого цвета), которые поворачиваются при  $x \approx 1/2$ . А.С. Чуйков на компьютере, проработавшем десятки часов, получил картину, изображённую на рис. 7. Если есть корень  $z_1$ , то в силу теоремы о симметрии нулей функции  $\zeta(z)$ , будет и ещё один корень  $z_2 = 1 - z_1$  с тем же  $y$ . Но он лежит уже в «белой» части, где  $\zeta(z)$  положительна и возрастает на отрезке  $(0; 1)$  и пересекает поверхность границей графика  $Im\zeta(z) < 0$  при  $x = 1/2$  (рис. 8). График этой функции в диапазоне около 10000 изображён на рис. 7.

Рассмотрим ситуацию вокруг корня. Он лежит в точке  $z_1$  пересечения около правого конца области, в которой  $Re \zeta(z)$  отрицательна. В силу симметрии корней, существует ещё один корень  $z_2 = 1 - z_1$ . Чтобы лучше уяснить ситуацию с поиском комплексных корней, покажем его на примере функции

$$w = \exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y),$$

где  $Re(e^z) = e^x \cos y < 0 \Rightarrow \cos y < 0;$   
 $Im(e^z) = e^x \sin y < 0 \Rightarrow \sin y < 0.$

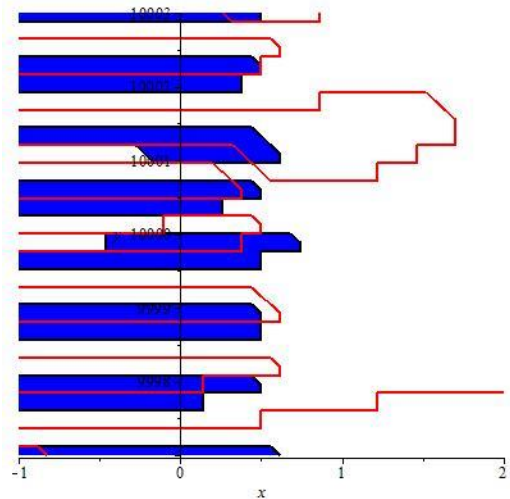
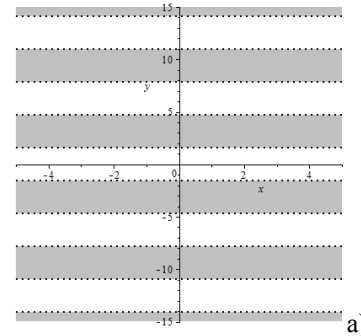
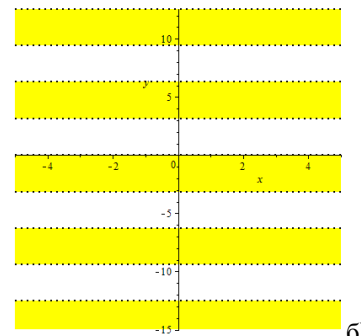


Рисунок 7 – График  $Re(\zeta(z)) < 0, y_k \approx 10^4$

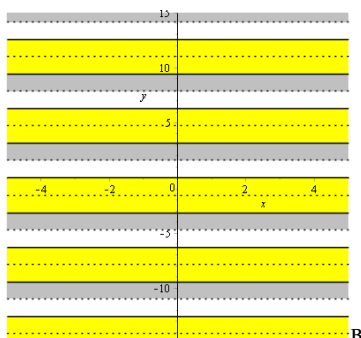
На рис. 8 видно, что границы этих областей не пересекаются. Ясно, что модуль этой функции равен  $e^x > 0$ .



а)



б)



в)

Рисунок 8 – Графики: а)  $Re(\exp(z)) < 0;$  б)  $Im(\exp(z)) < 0;$  в) на одном рисунке

Трёхмерный график функции  $\text{Re}(\exp(z))$  показан на рис. 9. Лучшее представление даёт плоский график, на котором изображены «глубины» и «суша», как на топографической карте. Там не изображена область  $y > 0$  ввиду симметрии относительно оси ОХ функции  $z^2 + 1$  (рис. 10).

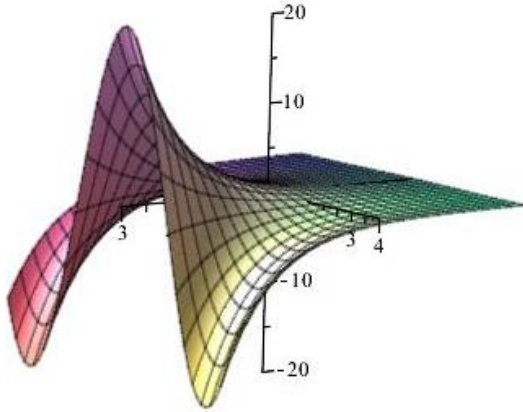


Рисунок 9 – Функция  $\text{Re}(\exp(z))$

### Исследование структуры областей возле корней дзета-функции

Аналогичный характер имеет график действительной части дзета-функции в районе каждого  $\text{Re}(\zeta(z)) + a < 0$ ;  $a > 0$  – «глубины»,  $a < 0$  – «высоты». На рис. 11. представлена соответствующая картина в окрестности 4 – го корня, где область  $\text{Re}(\zeta(z)) < 0$  выделена темным цветом, а  $0 < \text{Re}(\zeta(z))$  – показана светлым. Корень – пересечение линий -  $\text{Re}(\zeta(z)) = 0$  (границы темной и светлой областей) и линией  $\text{Im}(\zeta(z)) = 0$  – красный цвет. Показана также зона «глубин», где  $\text{Re}(\zeta(z)) < -0,5$  и зоны «высот», в которой  $0,2 < \text{Re}(\zeta(z)) < 0,5$  (светло-желтая) и  $0,5 < \text{Re}(\zeta(z))$ . Видно, что корень в точке  $z = \frac{1}{2} + iy_4$ ,  $y_4 \approx 30,5$ . Таким образом, если верно, что аналогичная структура сохраняется для всех нетривиальных корней  $\zeta(z)$ , то теорема Римана доказана. Но как это доказать? Возможно, с помощью финитизации вдоль оси ОУ.

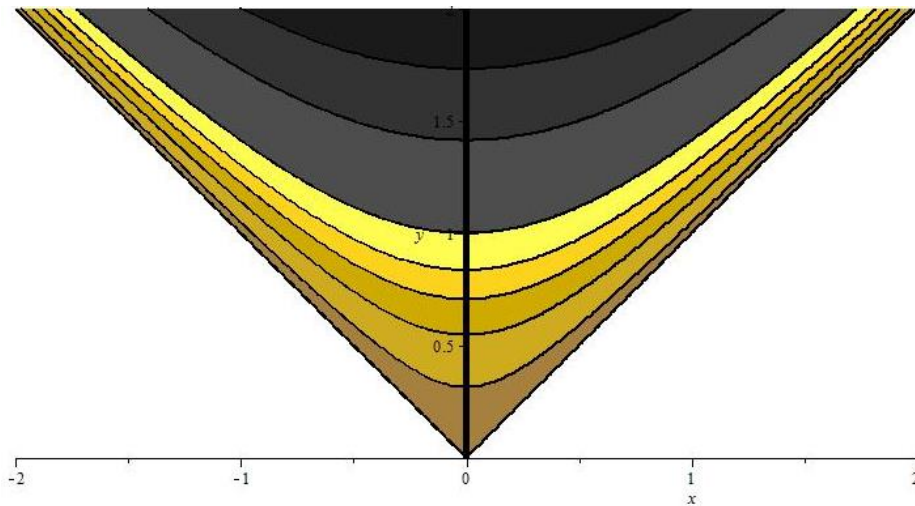


Рисунок 10 – Корень у подножия «гор» и на кромке у залива «моря»

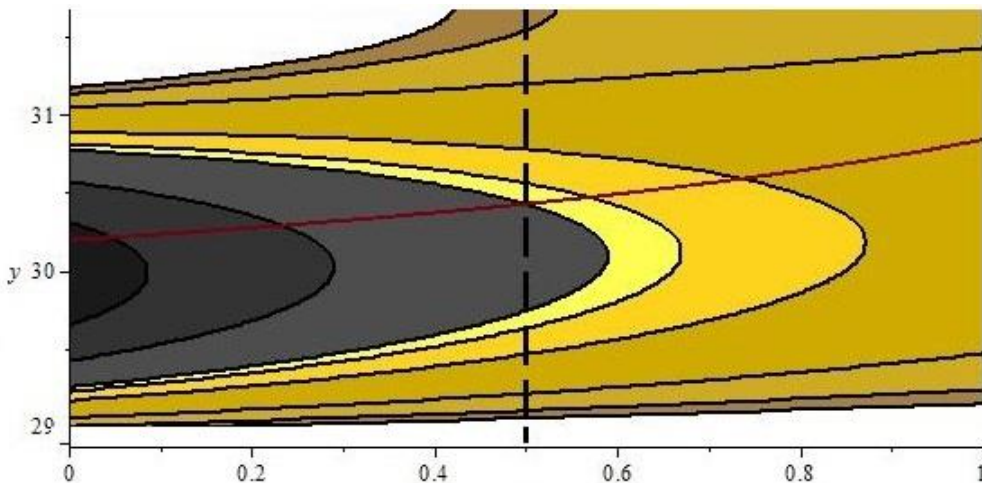


Рисунок 11 – «Залив» и «суша» возле 4-го корня  $\zeta$ -функции Римана



### Результаты и обсуждение

Нам неизвестны попытки использовать *неравенства* в комплексной области для исследования положения корней дзета-функции Римана. Как пишет автор [1], "... великая головоломка, впервые сформулированная в той работе 1859 г., по-прежнему остается нерешенной — она противостоит атакам лучших умов планеты так же твердо, как когда Риман писал о своих «недолгих бесплодных попытках» доказать ее в далекие времена, когда аналитическая теория чисел только-только родилась. Каковы же перспективы на сегодняшний день, когда усилия расколоть орешек ГР [гипотеза Римана] прилагаются уже пятнадцатое десятилетие?" Эта книга написана ещё пару десятилетий тому.

Нам известно использование компьютера вместе с аналитическими методами в работе [8], которую её автор считает доказательством теоремы Римана. Он в аннотации пишет: «В данной статье в среде Maple наглядно иллюстрируются основные идеи доказательства гипотезы Римана. Для понимания достаточно знать, что такое комплексное число и иметь самое элементарное понятие о дзета-функции Римана. Можно даже не знать, что такое интеграл и знак суммирования, воспринимая их в тексте как красивые иероглифы. Можно, наверно, сразу же перейти к части 2. Компьютерные эксперименты, обращаясь к части 1. Введение за пояснениями. Желающие ознакомиться с математическим доказательством могут найти его на сайте [riemann.ucoz.net](http://riemann.ucoz.net), там же есть и видеолекция». Его доказательство использует интегральное представление функции Римана:

$$\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1}.$$

Он использует только мнимую часть равенства ( $s=\sigma+it$ ) и утверждает «Изучение другого уравнения этой системы логической необходимости для доказательства не имеет», доказывая, что оно имеет единственный корень. Он рассматривает это равенство в области *известного* корня. Там и рисунок (у нас рис.12).

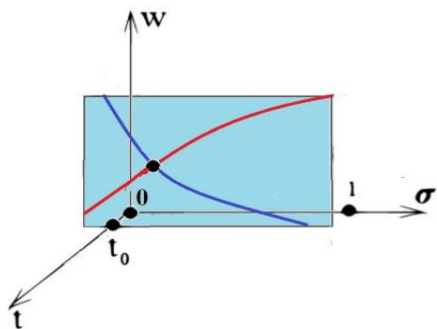


Рисунок 12 – из статьи [8]

На нём есть и плоскость с корнем. В статье [9] рассматривается вопрос о *кратности* корней. У нас и в [7] этот вопрос не возникает. Рис. 5 может помочь в поиске таких корней.

Для функции  $f = z^4+z^2$ , имеющей двукратный корень  $z=0$ , ситуация изображена на рис. 13. Там угол между касательными в т. О составляет  $\pi/2$ . Пунктирные линии –  $\text{Im}f(z)=0$ . Пунктирная гипербола не пересекается с гиперболой – границей области  $\text{Re}f=0$ .

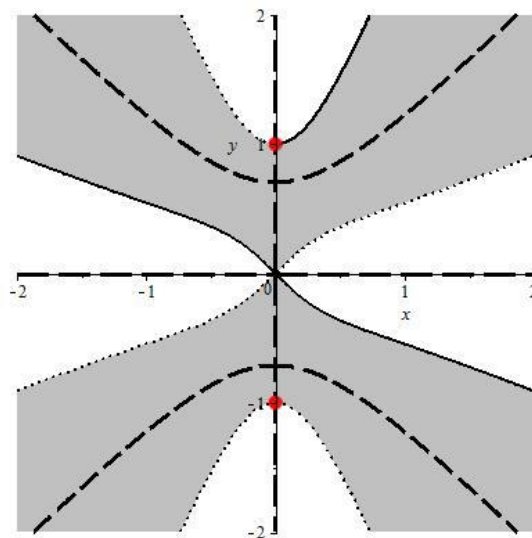


Рисунок 13 – 2-х кратный корень  $z^4+z^2$

Аналогична ситуация с 3-кратным корнем функции  $z^4+z^3$  показана на рис. 14. Трёхкратный корень  $x=0$  лежит на пересечении 3 пунктирных линий  $\text{Im}f(z)=0$ .

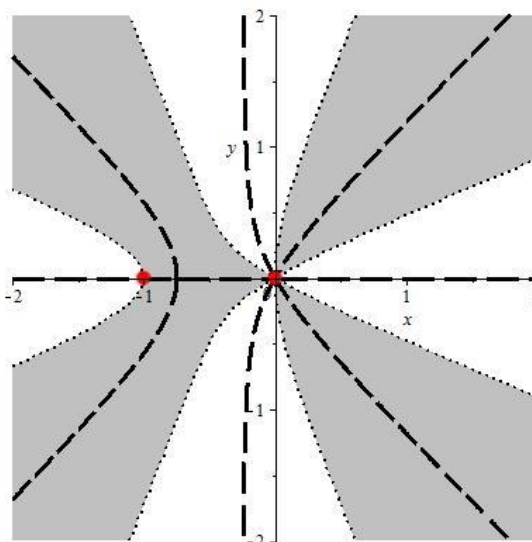


Рисунок 14 – 3-х кратный корень  $z^4+z^3$

Автор выражает благодарность А. Чуйкову, Й. Щтеренбергу и В. Беловодскому за помощь в построении рисунков и оформлении текста доклада.

## Выводы

1. Метод комплексной невязки позволяет структурировать область решений неравенств, их «глубину» и «высоту» в точках области. Показаны примеры расслоения таких областей.

2. Показано расположение областей  $\operatorname{Re}(z) < 0$  и  $\operatorname{Im}(z) < 0$ , когда корней нет.

3. С помощью такого расслоения и предположения о существовании корня  $z_k$ , действительная часть которого отлична от  $1/2$ , учитывая симметрию корней относительно прямой  $x=1/2$ , показано, что есть только один корень  $z_k=1/2+iy_k$   $\zeta$ -функции при каждом  $y_k$ .

4. Учитывая доказательство Г. Харди бесконечности множества нулей  $\zeta$ -функции, теорема Римана нами доказана, если сохраняется структура областей возле **всех** «далёких» корней.

## Литература

1. Дербишир, Дж. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешённая проблема в математике / Дж. Дербишир — Москва: Астрель, 2010. — 464 с.

2. Ерёмин, А.Ю. О вычислении дзета-функции Римана в комплексной области/ А.Ю. Ерёмин, И.Е. Капорин, М.К. Керимов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1985. — Т. 25, № 4. - С.500-511.

3. Кужель, О. В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа / О. В. Кужель. — Киев.: Вища школа, 1974. - 80 с.

4. Ткаченко, С. П. Комплексні розв'язки квадратної нерівності / С. П. Ткаченко, З. Ю.Філер // Математика в школі, 2003. — №2. — С. 47-49.

5. Філер, З. Ю. Неравенства в комплексной области / З. Ю. Філер — Современные проблемы естественных наук. — Харків: ХДУ, 2014. — Т.1(2) — С. 194-199.

6. Філер, З. Ю. Рівняння та нерівності в науці та навчанні / З. Ю. Філер // Матеріали міжвузівської регіональної конференції «Математика, її застосування та викладання» (Кіровоград, 24-25.09.1999 року). — РВГ ІЦ КДПУ, 1999. — С. 141-145.

7. Філер, З. Ю. Методика пошуку комплексних розв'язків нерівностей способом невязки/ З. Ю. Філер, А. С. Чуйков // Журнал ФМО, 2021. — №5. — С. 72-79.

8. Мусин, Н. М. Компьютерные эксперименты с дзета-функцией Римана / Н. М. Мусин // Журнал естественно-научных исследований, 2017. — Т.2, №2. — С.47-52.

9. Карацуба, А. А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой / А.А. Карацуба // Труды МИАН, 1985. — № 167. — С. 167—178.

**Філер З.Е. Неравенства в комплексной области и гипотеза Римана.** Рассматривается знак  $\zeta(z)$  функции в точках критической полосы. Используется представление об упорядочении в области комплексных чисел  $z_1 < z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$  и при  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$  с  $\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2)$ . Так как область, где  $\zeta(z) < 0$  вмещает подобласть, где  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , выделение последней может быть осуществлено на ПЭВМ. Точки пересечения границ областей  $\operatorname{Re}(z) < 0$  и  $\operatorname{Im}(z) < 0$  и являются корнями  $\zeta(z)$ . Отличие действительной части корня от  $1/2$  невозможно, так как корню  $z_1 < 1/2$  соответствует корень  $z_2 = 1 - z_1$  в этой же полосе. Но он будет лежать в полосе, где  $\zeta(z) > 0$ , а не равно нулю. Если же  $z_1 > 1/2$ , то  $1 - z_1$  будет лежать в области, где  $\zeta(z) < 0$ , что невозможно, если  $\zeta(z_2) = 0$ . Поэтому  $z_2 = z_1 = 1/2$ .

**Ключевые слова.** упорядочение области комплексных чисел, выделение области  $\operatorname{Re}(z)$  на ПЭВМ, доказательство от противного гипотезы Римана.

**Filer Z.E. Inequalities in the complex domain and the Riemann hypothesis.** The sign  $\zeta(z)$  of the function at the points of the critical band is considered. The representation of the ordering in the domain of complex numbers  $z_1 < z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$  and at  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$  with  $\operatorname{Im}(z_1) < \operatorname{Im}(z_2)$ . Since the area where  $\zeta(z) < 0$  accommodates the subdomain where  $\operatorname{Re}(z) < 0$ , the allocation of the latter can be carried out on a PC. The points of intersection of the boundaries of the regions  $\operatorname{Re}(z) < 0$  and  $\operatorname{Im}(z) < 0$  and are the roots of  $\zeta(z)$ . It is impossible to distinguish the real part of the root from  $1/2$ , since the root  $z_1 < 1/2$  corresponds to the root  $z_2 = 1 - z_1$  in the same band. But it will lie in the band where  $\zeta(z) > 0$ , and not equal to zero. If  $z_1 > 1/2$ , then  $1 - z_1$  will lie in the region where  $\zeta(z) < 0$ , which is impossible if  $\zeta(z_2) = 0$ . Therefore,  $z_2 = z_1 = 1/2$ .

**Keywords.** ordering of the domain of complex numbers, allocation of the domain  $\operatorname{Re}(z)$  on a PC, proof of the opposite.

Статья поступила в редакцию 25.11.2022  
Рекомендуется к публикации профессором Зори С. В.