УДК 004.421.2

Теорема Хана-Банаха – как одна из основных теорем функционального анализа и ее практическое применение

Ю. Н. Добровольский

Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
dyn_don_20.14@mail.ru

Аннотация

Рассмотрена история возникновения теоремы Хана-Банаха. Введены основные линейные нормированные пространства, линейные непрерывные функционалы и их нормы. Введено понятие гиперподпространство, гиперплоскость. Приведены примеры на вычисление нормы функционала и продолжение функционала на все пространство с сохранением нормы. Линейные функционалы и их продолжение на все функциональное пространство с сохранением нормы является мощным математическим аппаратом для развития многих направлений современной математики.

Введение

В начале 20-го века, этап развития классической математики был полностью завершен. Начинался этап развития современной математики.

Необходимо было проанализировать и обобщить накопленные человечеством знания по математике. Перед учеными математиками стояли новые идеи и задачи, посмотреть на изученные вещи иначе, с общей точки зрения. Выяснить, существует ли связь между различными математическими объектами, или другими словами, не вникая в природу математического объекта, изучить его свойства. Это было оправдано тем, что такая связь существует и различные математические объекты имеют общие свойства.

Некоторые положения, которые легли в основу функционального анализа: Обобщение понятия пространства, развитие и обобщение понятия функции, создание понятия функционального пространства.

Также на развитие функционального анализа оказали влияние физические теории, например квантовая механика и квантовая теория поля. Многие понятия функционального анализа широко использовались физиками задолго до того, как им было дано строгое математическое обоснование.

Высокая степень абстракции вводимых понятий делает функциональный анализ довольно сложным. Именно абстрактность позволяет исследовать далекие на первый взгляд друг от друга вопросы и успешно применять его методы в различных других дисциплинах.

В функциональном анализе теорема Хана-Банаха является основным результатом, который позволяет расширить ограниченные линейные функционалы, определенные на векторном подпространстве некоторого векторного пространства, на все пространство.

Теорема также показывает, что существуют непрерывные линейные функционалы, определенные на каждом нормированном векторном пространстве, для изучения двойственного пространства.

Другая версия теоремы Хана-Банаха известна как теорема **Хана-Банаха о разделении** или теорема о разделении гиперплоскостями и имеет множество применений в выпуклой геометрии.

Актуальность данной темы заключается в том, что теорема Хана-Банаха является эффективным теоретическим средством в практическом решении конкретных задач современной теоретической и прикладной математики.

Тема исследования: Линейные непрерывные функционалы, теорема Хана-Банаха.

Объект исследования: линейные функционалы, теорема Хана-Банаха.

Предмет исследования: определение нормы линейного непрерывного функционала, продолжение функционала на все пространство с сохранением нормы.

Цель исследования: дать теоретическое обоснование понятий функционал, продолжение функционала при практическом их применении.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть линейные непрерывные функционалы, заданные на линейных нормированных пространствах.

2. Изучить способы определения нормы функционала, дать ему геометрическую интерпретацию.

3. Усвоить практическое применение теоремы Хана-Банаха.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования:

– обобщение изученных ранее данных;

– анализ научно-методической литературы;

– систематизация информации.

Научная новизна: расширение возможностей функционального анализа для решения задач современной науки: некоммутативный функциональный анализ, теория операторных алгебр, вероятностный и стохастический функциональный анализ, функциональный анализ на пространствах фрактальных структур.

Практическое значение: материал, рассмотренный в данной статье, может быть использован для решения задач математического и функционального анализа.

Структура исследования: работа состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованной литературы.

1. История возникновения теоремы Хана-Банаха

Большой вклад в историю развития теоремы Хана-Банаха внесли известные ученые: австрийский математик **Эдуард Хелли** (1884-1943); венгерский и шведский математик **Марсель Рис** (1886-1969).

История теоремы **Хана-Банаха** несколько необычна. **Эдуард Хелли** считается одним из основоположников функционального анализа, но теорема названа в честь австрийского математика **Ганса Хана** (1879-1934) и польского математика **Стефана Банаха** (1892-1945), которые независимо друг от друга доказали ее в конце 1920-х годов.

Тем не менее, теорема возникла в результате работ других учёных:

Эдуард Хелли в 1912 году доказал частный случай теоремы для пространства непрерывных функций на интервале.

Марсель Рис в 1923 году доказал теорему о расширении, из которой можно вывести теорему Хана-Банаха.

Теорема Хана-Банаха утверждает, что любой ограниченный линейный функционал, определённый на подпространстве нормированного пространства, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

Доказательства теоремы Хана-Банаха используют разные методы, например:

Метод Хелли. Хелли показал, что некоторые линейные функционалы, определённые в подпространстве определённого типа нормированного пространства, имеют расширение той же нормы, используя индукцию.

Метод Хана. В 1927 году Хан определил общие банаховы пространства и применил метод Хелли для доказательства сохраняющей норму версии теоремы Хана-Банаха для банаховых пространств.

Обобщение Банаха. В 1929 году Банах, который не знал о результате Хана, обобщил его, заменив версию, сохраняющую норму, версией с доминирующим расширением, использующей сублинейные функции.

Теорема Хана-Банаха имеет множество приложений в функциональном анализе, например:

Решение бесконечных систем уравнений. Это необходимо для решения таких задач, как задача о моментах, в которой, зная все потенциальные моменты функции, нужно определить, существует ли функция с такими моментами, и если да, то найти ее по этим моментам. Другой подобной задачей является задача о косинусном ряде Фурье, в которой, зная все потенциальные коэффициенты косинуса Фурье, нужно определить, существует ли функция с такими коэффициентами, и если да, то найти ее.

2. Непрерывные линейные функционалы

В данной статье будут рассмотрены следующие линейные нормированные пространства.

1. $C[a,b]$ – пространство всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

2. l_p – пространство всех числовых последовательностей, таких, что $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \le p < \infty$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. $L_p[a,b]$ – пространство всех функций, определенных на отрезке $[a,b]$, для которых интеграл Лебега $\int\limits_{[a,b]} |x(t)|^p\, dt < \infty$ – конечен, с нормой

$$\|x\| = \left(\int\limits_{[a,b]} |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. $M[a,b]$ – пространство всех ограниченных на $[a,b][$ функций с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

5. l_∞^n – пространство всех упорядоченных наборов из n действительных чисел.

$x = (x_1, \dots, x_n),\ n \ge 1$. Норма определяется по формуле $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$.

6. $l_p^n, 1 \le p < \infty$ – пространство всех упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n),\ n \ge 1$. Норма определяется с помощью равенства

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

На этих линейных нормированных пространствах будут заданы линейные непрерывные функционалы.

Определение 1. Пусть L – линейное нормированное пространство. Отображение f, действующее из L в R, будем называть **функционалом.**

Определение 2. Функционал f называется линейным, если он аддитивен, то есть для всех l_1, l_2 из L

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2),$$

и однороден, то есть для всех $l \in L$ и любых вещественных чисел λ

$f(\lambda l) = \lambda f(l)$.

Множество $\ker f = \{x \in L : f(x) = 0\}$ называется **ядром** функционала f.

Определение 3. Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех x таких, что $\|x - x_0\|_L < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

На практике чаще применяют эквивалентное определение непрерывности:

Определение 4. Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Верно утверждение: Если линейный функционал непрерывен в какой-либо одной точке $x_0 \in L$, то он непрерывен на L.

Определение 5. Линейный функционал f, заданный на нормированном пространстве L, называется **ограниченным,** если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in L$ выполняется равенство

$$|f(x)| \le c\|x\|_L.$$

Можно показать, что из непрерывности функционала следует его ограниченность, верно и обратное.

3. Геометрический смысл линейного функционала

Определение 1. Пусть L – линейное пространство. L_0 – линейное подпространство L. L_0 называется **гиперподпространством**, если существует элемент $x_0 \notin L_0$ такой, что $L = lin(x_0, L_0)$. Говорят, что L_0 имеет коразмерность 1. Например, если L – n-мерное пространство, то гиперподпространство – это (n-1)-мерное подпространство.

Принимаем без доказательства, что верны следующие **утверждения:**

1. Ядро функционала $ker\, f$ является гиперподпространством. Здесь f – линейный функционал.

2. Пусть f_1 и f_2 – линейные функционалы, заданные на L. Тогда, если $ker\, f_1 = ker\, f_2$, то $f_1 = \lambda f_2$ для некоторого числа λ.

Определение 2. Пусть L_0 – гиперподпространство в L. Множество $L_1 = L_0 + x$ называется **гиперплоскостью.** Здесь $x \notin L_0$. Иными словами, гиперплоскость – это множество, получающееся из гиперподпространства параллельным переносом (сдвигом) на какой-нибудь вектор $x \in L$. Например, если $L = R^3$, то гиперплоскость – это плоскость, не проходящая через начало координат.

Справедливы следующие **утверждения:**

Утверждение 3.1.

$$M = \{x \in L : f(x) = c, c \ne 0\}$$

является гиперплоскостью.

Утверждение 3.2.

Множество $M \subset L$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда M можно представить в виде $M = \{x \in L : f(x) = 1\}$, где f – линейный функционал, причем f определяется однозначно.

Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L, и всеми гиперплоскотями в L.

Можно показать, что линейный функционал в нормированном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Любая гиперплоскость в линейном нормированном пространстве или замкнута, или плотна в нем, а так же является выпуклым множеством.

Пусть f – линейный функционал, определенный на линейном нормированном пространстве L.

Можно показать, что f непрерывен тогда и только тогда, когда множества $\{x \in L : f(x) < c\}$ и $\{x \in L : f(x) > c\}$ являются открытыми в пространстве L.

4. Норма функционала

Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на нормированном пространстве L. Так как f является ограниченным функционалом, то существует постоянная M такая, что

$$\left|f(x)\right| \le M\left\|x\right\|. \quad (4.1)$$

Определение 1. Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющая неравенству (4.1), называется **нормой** и обозначается $\left\|f\right\|$.

Таким образом,

$$\left|f(x)\right| \le \left\|f\right\|\left\|x\right\|. \quad (4.2)$$

Отметим некоторые свойства нормы функционала

1. $\left\|f\right\| = \sup\limits_{x\ne 0}\dfrac{\left|f(x)\right|}{\left\|x\right\|}$.

2. $\left\|f\right\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\left|f(x)\right| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left|f(x)\right|$.

Норма функционала обладает всеми свойствами нормы, а именно

1) $\left\|f\right\| \ge 0, \left\|f\right\| = 0 \Leftrightarrow f = 0;$

2) $\left\|\lambda f\right\| = \left|\lambda\right|\left\|f\right\|;$

3) $\left\|f+g\right\| \le \left\|f\right\| + \left\|g\right\|$.

Приведем примеры вычисления нормы функционала.

Пример 4.1. Вычислить норму функционала $f(x) = x(1) - 2x(2)$, заданного в пространстве $C[0,2]$.

Решение. В общем случае имеем пространство C[a,b]. По условию $a = 0, b = 2.$ Норма

$$\left\|x\right\| = \max_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|.$$

Используя неравенство треугольника и определение нормы в пространстве $C[0,2]$, имеем

$$\left|f(x)\right| \le \left|x(1)\right| + 2\left|x(2)\right| \le 3\left\|x\right\|_{C[0,2]}.$$

Так как $\left\|f\right\|$ – это наименьшая константа, то $\left\|f\right\| \le 3$. Чтобы получить противоположное по знаку неравенство, воспользуемся тем, что $\left\|f\right\| \ge \dfrac{\left|f(x)\right|}{\left\|x\right\|_{C[0,2]}}$ для любого $x \ne 0$. Тогда

$$\left\|f\right\| \ge \frac{\left|x(1) - 2x(2)\right|}{\max\limits_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|}.$$

Выберем непрерывную функцию x так, чтобы $\max\limits_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right| = 1$ и $x(1) = 1$, и $x(2) = -1$. Такие функции существуют. Для этого нужно соединить точки (1,1) и (2,-1) так, чтобы не выйти за пределы полосы, определяемой прямыми y=1, y=-1. Тогда $\left\|f\right\| \ge 3$ и вместе с ранее полученным неравенством имеем $\left\|f\right\| = 3$.

Пример 4.2. Вычислить норму функционала $f(x) = 2x_1 - 3x_3$, заданного в пространстве l_4.

Решение.

Имеем пространство l_p. По условию p=4.

Тогда $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^4\right)^{\frac{1}{4}} < \infty$, норма

$$\left\|x\right\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Имеем отображение:

$$f:\left\{x = (x_1, x_2 \ldots)\ (x_k \in \mathbb{R})\right\} \to \left\{2x_1 - 3x_3\right\}.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|b_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.3)$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;\ p, q \ge 1$.

Взяв

$p = 4,\ q = \dfrac{4}{3},\ a_1 = x_1,\ a_2 = 0, a_3 = x_3,\ b_1 = 2,$

$b_2 = 0,\ b_3 = -3,\ a_i = b_i = 0,\ i \ge 4,$

получим

$$\left|f(x)\right| = \left|2x_1 - 3x_3\right| \le \left(\left|2\right|^{\frac{4}{3}} + \left|-3\right|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\left|x_1\right|^4 + \left|x_3\right|^4\right)^{\frac{1}{4}} \le$$

$$\le c \cdot \left\|x\right\|_{l_4}.$$

Здесь $c = \left(2^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

Из определения нормы функционала следует, что $\left\|f\right\| \le c$. С другой стороны, для любого $x \in l_4\ (x \ne 0)$ выполняется неравенство $\left\|f\right\| \ge \dfrac{\left|f(x)\right|}{\left\|x\right\|_{l_4}}$, т.к. $\left|f(x)\right| \le \left\|f\right\|\left\|x\right\|$. Подберем последовательность $\hat{x}$ так, чтобы $\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\left\|\hat{x}\right\|_{l_4}} = c$.

Для этого учтем, что неравенство Гельдера (4.3) обращается в равенство, если $b_i = \left|a_i\right|^{p-1} \cdot \operatorname{sgn} a_i$.

Взяв

$p=\dfrac{4}{3}, q=4, a_1=2, a_3=-3, a_i=0, i\neq 1,3$ и

$$\hat{x}_i=\begin{cases}2^{\frac{1}{3}}, & i=1;\\ -3^{\frac{1}{3}}, & i=3;\\ 0, & \textit{в остальных случаях},\end{cases}$$

получим $f\left(\hat{x}\right)=2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}, \left\|\hat{x}\right\|_{l_4}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Тогда $\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\left\|\hat{x}\right\|_{l_4}}=c$. Окончательно имеем $\|f\|=c$

Пример 4.3. Вычислить норму функционала $f(x)=\int\limits_{[-1,1]} tx(t)dt$, заданного в пространстве $L_3[-1,1]$.

Решение. Имеем пространство $L_p[a,b]$. По условию p=3, a=-1, b=1.

Интеграл Лебега $\int\limits_{[-1,1]}\left|x(t)\right|^3 dt<\infty$, с нормой $\|x\|=\left(\int\limits_{[-1,1]}\left|x(t)\right|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}}$.

Имеем отображение:

$$f:\{x=x(t)\}\to\left\{\int\limits_{[-1,1]} tx(t)dt\right\}$$

Используем интегральное неравенство Гельдера:

$$\left|\int\limits_{[a,b]} y(t)x(t)dt\right|\leq\left(\int\limits_{[a,b]}\left|y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{[a,b]}\left|x(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.4)$$

Здесь $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1;\ \ p,\ q\geq 1$.

Взяв $p=\dfrac{3}{2},\ q=3,\ y(t)=t$, получим

$$\left|f(x)\right|\leq\left(\int\limits_{[-1,1]}\left|t\right|^{\frac{3}{2}} dt\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int\limits_{[-1,1]}\left|x(t)\right|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Вычислив первый интеграл, получим $\|f\|\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. С другой стороны, учтем, что неравенство Гельдера (4.4) обращается в равенство, если $x(t)=\left|y(t)\right|^{p-1}\operatorname{sgn} y(t)$. Выберем $\hat{x}(t)=t^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn} t$. Тогда $f(\hat{x})=\int\limits_{[-1,1]}\left|t\right|^{\frac{3}{2}} dt=\dfrac{4}{5}$, а

$\left\|\hat{x}\right\|_{L_3[-1,1]}=\left(\int\limits_{[-1,1]}\left|t\right|^{\frac{3}{2}} dt\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$. Так как $\|f\|\geq\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\|x\|}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, то вместе с доказанным ранее неравенством получим $\|f\|=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Пример 4.4. Вычислить норму функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$, заданного в пространстве C[-1,1].

Решение.

Имеем пространство C[a,b] непрерывных на [a,b] функций с нормой

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)\right|.$$

Напишем цепочку неравенств:

$$\left|f(x)\right|=\left|\int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt\right|\leq\int\limits_{-1}^{1}\left|t\right|\left|x(t)\right|dt\leq$$

$$\leq\max_{t\in[-1,1]}\left|x(t)\right|\int\limits_{-1}^{1}\left|t\right|dt=\|x\|_{C[-1,1]}\int\limits_{-1}^{1}\left|t\right|dt.$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\left|t\right|dt=1$, получаем $\|f\|\leq\|x\|_{C[-1,1]}$. Тогда $\|f\|\leq 1$. Для получения противоположного по знаку неравенства попробуем подобрать непрерывную функцию $\hat{x}$ так, чтобы $\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\left\|\hat{x}\right\|_{C[-1,1]}}=1$. Все попытки найти такую непрерывную функцию оказываются безуспешными. Это объясняется тем, что она не существует. Однако если взять функцию $\hat{x}(t)=\operatorname{sgn}(t)$ и рассмотреть функционал f на пространстве M[-1,1] – ограниченных на [-1,1] функций , то $\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\left\|\hat{x}\right\|_{C[-1,1]}}=1$. Но функция $\hat{x}$ разрывная, а значит, не принадлежит пространству C[-1,1].

Поступим следующим образом. Найдем последовательность непрерывных функций x_n таких, что $x_n(t)\to\hat{x}(t)$ для каждого $t\in[-1,1]$. Для построения последовательности x_n нужно "подправить" функцию $\hat{x}(t)=\operatorname{sgn}(t)$ в месте разрыва. Имеем

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{n}\le t\le 1;\\ nt, & -\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{1}{n};\\ -1, & -1\le t\le -\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Вычислим $f(x_n)$. Воспользуемся тем, что функция $tx_n(t)$ является четной.

Тогда

$$f(x_n)=2\left(\int_0^{\frac{1}{n}} nt^2dt+\int_{\frac{1}{n}}^{1} tdt\right)=1-\frac{1}{3n^2}.$$

Так как $\left\|x_n\right\|_{C[-1,1]}=1$, то

$$\left\|f\right\|\ge\frac{\left|f(x_n)\right|}{\left\|x_n\right\|}=1-\frac{1}{3n^2}.$$

Если n устремить к бесконечности, то получим $\left\|f\right\|\ge 1$. Итак, $\left\|f\right\|=1$.

В отличие от предыдущих примеров мы не смогли найти функцию $\hat{x}$ такую, что $\left\|f\right\|=\dfrac{\left|f(\hat{x})\right|}{\left\|x\right\|}$.

5. Геометрическая интерпретация нормы функционала.

Утверждение 5.1. Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на нормированном пространстве L. Тогда

$$\left\|f\right\|=\frac{1}{\inf\limits_{x\in L_f}\left\|x\right\|};\qquad(5.1)$$

здесь $L_f=\left\{x\in L: f(x)=1\right\}$.

Таким образом, чтобы найти норму функционала, нужно построить гиперплоскость L_f и найти расстояние d от нуля до этой гиперплоскости. Тогда $\left\|f\right\|=\dfrac{1}{d}$.

Покажем, как можно найти норму функционала, используя формулу (5.1).

Пример 5.1. Вычислить норму функционала $f(x)=3x_1-4x_2$, заданного в пространстве l_∞^2.

Решение.

В общем случае имеем пространство l_∞^n, элементами которого являются упорядоченные наборы из n действительных чисел. Норма определяется по формуле

$$\left\|x\right\|=\max_{1\le k\le n}\left|x_k\right|.$$

В нашем случае n=2. На плоскости построим прямую $3x_1-4x_2=1$. Чтобы найти расстояние от нуля до этой прямой, нарисуем шар с центром в нуле радиуса r так, чтобы шар не пересекал данную прямую. Теперь увеличиваем размер шара до тех пор, пока он не коснется прямой. Радиус этого шара – это и есть расстояние от нуля до L_f. Напомним, что $\left\|x\right\|_{l_\infty^2}=\max\left\{\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right\}$, поэтому шар $B[0,r]$ – это квадрат с центром в нуле, стороны которого параллельны координатным осям. Длина стороны квадрата равна $2r$. В нашем случае касание произойдет в точке с координатами (r,-r). Так как точка (r,-r) лежит на прямой, то $3r+4r=1$ и $d=\dfrac{1}{7}$. Окончательно имеем $\left\|f\right\|=7$.

6. Теорема Хана – Банаха

Пусть L – линейное нормированное пространство. L_0 – некоторое его подпространство. Пусть далее на L_0 задан линейный непрерывный функционал f_0. Функционал f называется **продолжением** функционала f_0, если $f(x)=f_0(x)$ для всех $x\in L_0$.

Задача о продолжении линейного функционала часто встречается в анализе. Центральное место в этой теме занимает следующая теорема.

Теорема Хана-Банаха. Пусть f_0 – линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве L_0, $L_0\subset L$. Тогда функционал f_0 может быть продолжен до некоторого линейного непрерывного функционала f на всем пространстве L без увеличения нормы, то есть так, что

$$\left\|f_0\right\|_{L_0}=\left\|f\right\|_L.$$

Можно дать геометрическую интерпретацию теореме Хана-Банаха. Как следует из утверждения 2.1, уравнение $f_0(x)=1$ определяет в L_0 гиперплоскость, лежащую на расстоянии

$\frac{1}{\|f_0\|}$ до нуля. Продолжая f_0 без увеличения нормы до функционала на всем L, мы проводим через эту частичную гиперплоскость "большую" гиперплоскость на всем L, причем расстояние до нуля остается прежним.

Приведем примеры построения продолжения линейного функционала на плоскости и в трехмерном пространстве.

Пример 6.1. Пусть L_0 – подпространство l_1^2, определяемое формулой

$$L_0 = \left\{ x \in l_1^2 : x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

На L_0 задан функционал $f_0(x) = x_1 - 2x_2$. Найти продолжение функционала f_0, чтобы выполнялись условия теоремы Хана-Банаха.

Решение.

Напомним, что в общем случае подпространство $l_p^n, 1 \le p < \infty$ - это пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из n действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n),\, n \ge 1$. Норма определяется с помощью равенства

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

По условию p=1, n=2.

Вычислим норму функционала f_0. По определению имеем:

$$\|f_0\|_{L_0} = \sup_{x_1 + x_2 = 0} \frac{|x_1 - 2x_2|}{|x_1| + |x_2|} = \frac{3}{2}.$$

Теорема 6.1. Пусть f – линейный функционал, заданный на $l_p^n,\ 1 \le p < \infty$. Тогда существует единственный элемент $a \in l_q^n$ такой, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (6.1)$$

и

$$\|f\| = \|a\|_{l_q^n} \qquad (6.2)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Из теоремы 6.1 следует, что искомый функционал f имеет вид

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

и

$$\|f\|_{l_1^2} = \max\left(|a_1|, |a_2| \right).$$

Так как функционал f является продолжением f_0, то $\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 = x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

Отсюда следует, что $(a_1 - a_2)x_1 = 3x_1$. Так как это верно для любого $x_1 \in R$, то $a_1 - a_2 = 3$.

Учитывая, что $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$, получаем второе условие на числа $a_1, a_2 : \max\left(|a_1|, |a_2| \right) = \frac{3}{2}$.

Таким образом, нужно решить уравнение $\max\left(|a_1|, |a_1 - 3| \right) = \frac{3}{2}$. Построив график $y = \max\left(|a_1|, |a_1 - 3| \right)$, находим, что $a_1 = \frac{3}{2}$.

Итак, искомый функционал имеет вид

$$f(x) = -\frac{3}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_2.$$

Приведем пример, показывающий, что функционал f_0 может иметь множество продолжений.

Пример 6.2. Пусть подпространство L_0 пространства l_∞^2 определяется формулой

$$L_0 = \left\{ x \in l_\infty^2 : x_1 = x_2 \right\}.$$

а

$$f_0(x) = x_1 + 3x_2.$$

Найти продолжение f_0.

Решение. Используем геометрический подход. Вычислим норму f_0, используя утверждение 3.1. Сейчас гиперплоскость:

$$A_{f_0} = \left\{ x \in L_0 : x_1 + 3x_2 = 1 \right\}$$

состоит из одной точки $M = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$. Так как расстояние от A_{f_0} до 0 равно $\frac{1}{4}$, то $\|f_0\| = 4$.

Построим теперь гиперплоскость (а сейчас это прямая) $A_f = \left\{ x \in L : f(x) = 1 \right\}$ так, чтобы она прошла через точку M и расстояние до нуля было равно $\frac{1}{4}$. Напомним, как находить расстояние от точки до прямой. Берем маленький шар с центром в заданной точке и "раздуваем" его до первого касания с прямой. В нашем случае мы должны нарисовать шар с центром в нуле и радиусом $\frac{1}{4}$.

Выясним, как выглядит шар в пространстве l_∞^2. Вспоминая, как задается норма в l_∞^2, получаем формулу

$$B\left[0,\frac{1}{4}\right]=\left\{x\in l_\infty^2:\ \max\left(|x_1|,|x_2|\right)=\frac{1}{4}\right\}.$$

Таким образом, шар в пространстве l_∞^2 – это квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что точка M попала в "вершину" шара $B\left[0,\frac{1}{4}\right]$. Это означает, что можно проводить любую прямую, которая проходит через M и заключена между прямыми $x_1=\frac{1}{4}$ и $x_2=\frac{1}{4}$ (прямая не должна пересекать шар). Уравнение любой такой прямой имеет вид

$$a_1\left(x_1-\frac{1}{4}\right)+a_2\left(x_2-\frac{1}{4}\right)=0,\quad a_1,a_2\ge 0.$$

Это уравнение можно записать по-другому

$$\frac{4}{a_1+a_2}\left(a_1x_1+a_2x_2\right)=1.$$

Итак, функционал

$$f(x)=\frac{4}{a_1+a_2}\left(a_1x_1+a_2x_2\right),$$

где $a_1,a_2\ge 0$ и $a_1^2+a_2^2\ne 0$, является искомым.

Заметим, что если точка попадает на грань шара (как в задаче 6.1), то продолжение единственное, а если в вершину (как в задаче 6.2), то продолжений множество. В частности, отсюда следует, что в евклидовом пространстве l_2^2 продолжение единственно, так как шар в l_2^2 круглый.

Пример 6.3. Пусть подпространство L_0 пространства l_1^3 определяется формулой

$$L_0=\left\{x\in l_\infty^2: x_1=t,\ x_2=2t,\ x_3=3t\right\}.$$

а

$$f_0(x)=2x_1+3x_2-x_3.$$

Найти продолжение f_0.

Решение. Вычислим норму функционала f_0.

Имеем

$$\|f_0\|=\sup_t\frac{|2t+6t-3t|}{|t|+|2t|+|3t|}=\frac{5}{6}.$$

Функционал f имеет вид

$$f(x)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3.$$

Так как f является продолжением f_0 и их нормы совпадают, то получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=2x_1+3x_2-x_3\\ x_1=t\\ x_2=2t\\ x_3=3t\\ \max\left(|a_1|,|a_2|,|a_3|\right)=\frac{5}{6}.\end{cases}$$

Первые четыре условия дают равенство $a_1+2a_2+3a_3=5$. Итак, остается решить такую задачу:

$$\max\left(|5-2a_2-3a_3|,|a_2|,|a_3|\right)=\frac{5}{6}.$$

Можно просто перебрать варианты, когда одно из чисел равно $\frac{5}{6}$, а два других не превосходят $\frac{5}{6}$. Мы решим задачу по-другому. Так как $|5-2a_2-3a_3|\le\frac{5}{6}$, то $\frac{25}{6}\le 2a_2+3a_3\le\frac{35}{6}$.

С другой стороны, $a_2\le\frac{5}{6}$ и $a_3\le\frac{5}{6}$, а значит, $2a_2+3a_3\le\frac{25}{6}$.

Следовательно, существует единственное решение задачи $a_1=a_2=a_3=\frac{5}{6}$.

Заключение

Новые задачи физики и математики, появившиеся в XX столетии, привели к появлению нового раздела математики – функциональный анализ.

Линейные функционалы и их продолжение на все функциональное пространство с сохранением нормы является мощным математическим аппаратом для развития следующих направлений современной математики:

1. Некоммутативный функциональный анализ.
2. Теория операторных алгебр.
3. Вероятностный и стохастический функциональный анализ.
4. Функциональный анализ на пространствах фрактальных структур.

Литература

1. Лебедев, В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика: учеб. пособие. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 296 с.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
3. Треногин, В. А. Функциональный анализ: учебник. – 4-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
4. Фёдоров, В. М. Курс функционального анализа. – СПб.: Лань, 2005. – 352 с.
5. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 3 т. Т. 1-2. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 424 с.
6. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 584 с.
7. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения (введение в теорию). – М.: Ком-Книга, 2010. – 304 с.
8. Волков, В. Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: курс лекций: учеб. пособие / В. Т. Волков, А. Г. Ягола. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во КДУ, 2009. – 140 с.
9. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
10. Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.

Добровольский Ю.Н. Теорема Хана-Банаха – как одна из основных теорем функционального анализа. *Рассмотрена история возникновения теоремы Хана-Банаха. Введены основные линейные нормированные пространства, линейные непрерывные функционалы и их нормы. Введено понятие гиперподпространство, гиперплоскость. Приведены примеры на вычисление нормы функционала и теорема о продолжении функционала на все пространство с сохранением нормы. Линейные функционалы и их продолжение на все функциональное пространство с сохранением нормы является мощным математическим аппаратом для развития многих направлений современной математики.*

Ключевые слова: *функциональные пространства, линейные функционалы, гиперподпространство, гиперплоскость, норма функционала, теорема Хана-Банаха.*

Dobrovolsky Y.N. Khan-Banach theorem - as one of the main theorems of functional analysis. *The history of the Khan-Banach theorem is considered. Basic linear normalized spaces, linear continuous functionals and their norms are introduced. Introduced the concept of hyperpodpro-space, hyperplane. Examples are given for calculating the functional norm and the theorem on extending the functional to the entire space while maintaining the norm. Linear functionals and their extension to the entire functional space while preserving the norm are a powerful mathematical tool for the development of many areas of modern mathematics.*

Key words: *functional spaces, linear functionals, hyperspace, hyperplane, functional norm, Khan-Banach theorem.*

Статья поступила в редакцию 02.02.2025
Рекомендована к публикации профессором Павлышом В. Н.