УДК 004.421.2

Метрика – как одна из важнейших структур абстрактной математики

Ю. Н. Добровольский
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
dyn_don_20.14@mail.ru

Аннотация

Дано определение метрики, описаны свойства основных классических функциональных пространств с заданной метрикой, приведены примеры метрических пространств; показано, как вычислять расстояние и как выглядит шар в пространстве $\mathbb{R}^2, C^k[a;b]$ *при различных заданиях метрики. Выполнено исследование функций на принадлежность определенным пространствам. Произведено вычисление метрики.*

Введение

одна из структур абстрактной математики восходит к простому математическому понятию – расстоянию между двумя точками А и В на плоскости. Его можно измерить через длину отрезка АВ. Очевидно, такой способ измерения расстояния не всегда удобен: например, он не годится в условиях передвижения по городу, где хотелось бы учитывать расположение улиц и скорость разных видов транспорта. Таким образом, для расстояния требуется адекватное обобщение, предоставляющее возможность вычислять его в разных ситуациях по-разному.

Самое общее понятие метрики (расстояния) и метрического пространства было введено в начале XX в. французским математиком **Морисом Фреше (1878-1973).** Метрика как способ измерять, насколько один объект отличается от другого, важна для построения математических моделей самых разных процессов.

Например, в микробиологии возникает необходимость определять расстояние между цепочками ДНК; в квантовой физике – между состояниями электронов в атоме; в процессах передачи информации подходящие метрики используются для идентификации и сглаживания помех, т.е. случайных отклонений функции на определенное расстояние от заданной траектории. Также метрики применяются в задачах кодирования и распознания сообщений. Например, для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google.

Разнообразие метрических пространств этим списком не исчерпывается. Можно указать несколько других метрик, которые отличаются относительной простотой построения и наглядностью приложений.

Например, в задачах транспортного планирования с радиальной схемой транспортных путей используется так называемая французская железнодорожная метрика. Для множества кривых на плоскости имеется метрика Хаусдорфа, которая в настоящее время используется в задачах компьютерного распознавания отсканированных текстов и изображений.

В информатике разработано много специальных метрик, среди которых классические метрики Хэмминга и Левенштейна. Они выражают меру различия между цепочками символов. В частности, это необходимо для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google. Эти же метрики находят применение в микробиологии, для измерения расстояния между цепочками ДНК.

Актуальность данной темы заключается в том, что метрические пространства находят применение в различных областях математики: анализе, геометрии, топологии и других разделах, оказывают влияние на изучение абстрактных математических понятий, как близость и сходимость.

Тема исследования: изучение основных понятий, теоремы, примеры и применения теории метрических пространств в различных областях математики.

Объект исследования: метрическое пространство.

Предмет исследования: структура множества вместе с заданной на нём метрикой.

Цель исследования: изучение основных определений и свойств метрических пространств; анализ различных типов метрических пространств с точки зрения их применения и свойств.

Задачи исследования: выполнение анализа примеров метрических пространств, чтобы показать их основные характеристики и свойства, выявить их уникальные атрибуты.

1. Перечень основных пространств, на которых будет задана метрика

1. $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ – пространство вещественных чисел.

2. $\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных числовых векторов. Пространство $\mathbb{R}^n$ состоит из векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, x=(x_1,x_2,…,x_n), где $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3, ..., n$. Числа x_k - координаты вектора.

3. $M_{m\times n}$ – пространство числовых матриц размера $m\times n$. Это пространство состоит из матриц $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...m$, $j=1,2,...,n$.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей $\ell^p, 1\le p\le\infty$.

Пространство $\ell^p, 1\le p<\infty$, состоит из бесконечных числовых последовательностей, $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, суммируемых со степенью *p*:

$$x\in\ell^p \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p<\infty.$$

В частности,

$$x\in\ell^1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|<\infty;$$

$$x\in\ell^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty.$$

Пространство ℓ^∞ состоит из ограниченных числовых последовательностей:

$$x\in\ell^\infty \Leftrightarrow \exists\, c\ge 0:\left|x_k\right|\le c,\ k=1,2,3,...$$

Форма записи для числовых последовательностей будет следующая: $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, или в развернутом виде $x=(x_1,x_2,...,x_k,...)$.

При натуральных значениях *p* пространства бесконечных числовых последовательностей упорядочены по включению следующим образом:

$$\ell^1\subset\ell^2\subset\ell^3\subset\ell^4\subset\ldots\subset\ell^\infty.$$

5. $C^k[a;b], k=0,1,2,3,...$ – пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.

Рассмотрим конечный отрезок [a;b]. Пространство C[a;b], которое иногда еще обозначают C^0[a;b], состоит из функций x=x(t), непрерывных на отрезке [a;b]:

$x\in C[a;b]\Leftrightarrow x(t)$ определена в каждой точке отрезка [a;b],

$\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x(t_0)$ для любой точки $t_0\in(a;b)$,

$$\lim_{t\to a+0}x(t)=x(a),\quad \lim_{t\to b-0}x(t)=x(b).$$

Пространство C^k[a;b], k=1,2,3,…, состоит из функций x=x(t), которые k раз непрерывно дифференцируемы на отрезке [a;b]. Это значит, что функция x=x(t) имеет непрерывные производные вплоть до порядка k:

$$x(t)\in C^k[a;b]\Leftrightarrow\exists x^{(k)}(t)\in C[a;b].$$

В частности,

$$x(t)\in C^1[a;b]\Leftrightarrow\exists x'(t)\in C[a;b];$$

$$x(t)\in C^2[a;b]\Leftrightarrow\exists x''(t)\in C[a;b].$$

Функции $x\in C^1[a;b]$ иногда называют гладкими функциями, а функции $x\in C^k[a;b]$ гладкими с порядком гладкости k. Пространство функций бесконечной гладкости C^∞[a;b] состоит из функций, которые непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз. Все пространства C^k[a;b] упорядочены по включению следующим образом:

$$C[a;b]\supset C^1[a,b]\supset C^2[a,b]\supset C^3[a,b]\supset\ldots$$
$$\ldots\supset C^\infty[a,b].$$

Кроме того, называем функцию x=x(t) кусочно-непрерывной на отрезке [a;b], если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция непрерывная. Называем функцию x=x(t) кусочно-гладкой на отрезке [a;b], если отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция гладкая.

6. Пространства Лебега. $L^p(a;b), 1\le p\le\infty$.

Названы в честь французского математика первой половины XX века **Анри Лебега (1875-1941).**

Рассмотрим конечный или бесконечный промежуток (a;b).

Пространство $L^p(a;b), 1\le p<\infty$, состоит из функций x=x(t), суммируемых (интегрируемых) со степенью p на промежутке (a;b):

$$x(t)\in L^p(a;b)\Leftrightarrow\int_a^b\left|x(t)\right|^p dt<\infty.$$

В частности,

$$x(t)\in L^1(a;b)\Leftrightarrow\int_a^b\left|x(t)\right|dt<\infty.$$

$$x(t)\in L^2(a;b)\Leftrightarrow\int_a^b x^2(t)dt<\infty.$$

Иногда говорят, что пространство $L^2(a;b)$ состоит из квадратично суммируемых функций.

При стремлении показателя *p* к бесконечности пространство $L^p(a;b)$ преобразуется в пространство $L^\infty(a;b)$, состоящее из ограниченных функций на промежутке (a;b):

$$x(t)\in L^\infty(a;b)\Leftrightarrow\exists c\ge 0:|\,x(t)\,|\le c,\ t\in(a;b).$$

Заметим, что функция, непрерывная на конечном отрезке, ограничена на нем и интегрируема с любым показателем p. Можно показать, что для конечного промежутка (a;b) все пространства, определенные пунктами 5, 6, образуют цепочку включений:

$$L^1(a;b) \supset L^2(a;b) \supset \ldots \supset L^\infty(a;b) \supset$$
$$\supset C[a;b] \supset C^1[a;b] \supset C^2[a;b] \supset \ldots$$
$$\supset C^\infty[a;b].$$

Отметим, что представленное здесь описание пространств Лебега не является строгим.

В определении и в других структурах пространств $L^p(a;b)$ используется интеграл Лебега, который, вообще говоря, отличается от привычного интеграла Римана. Однако для достаточно широкого класса функций интегралы Лебега и Римана дают одинаковый результат. В предлагаемом конспекте лекций для всех вычислений, связанных с пространствами $L^p(a;b)$, можно применять интеграл Римана, определенный или несобственный.

Кроме того, понятие элементов пространства $L^p(a;b)$ нуждается в уточнении. В конструкции этих пространств, главную роль играет процесс интегрирования. Значение интеграла Лебега не меняется при изменении подынтегральной функции в отдельно взятой точке или в нескольких точках, или на множестве нулевой длины. В связи с этим равенство двух функций понимается особым образом.

Говорят, что какое-то соотношение выполняется почти всюду на промежутке (a;b), если оно выполняется для всех $t \in (a;b)$ за исключением, может быть, множества нулевой длины. Если x(t)=y(t) почти всюду на (a;b), то считается, что x=y в пространстве $L^p(a;b)$. Поэтому, строго говоря, элементами пространства $L^p(a;b)$ являются классы функций. Точно так же ограниченность функции в пространстве $L^\infty(a;b)$ понимается в следующем смысле: $|x(t)| \le c$ почти всюду на (a;b). Поэтому полное название пространства $L^\infty(a;b)$ звучит так: пространство существенно ограниченных функций.

2. Метрические пространства

Определение 1. Множество *X* называется метрическим пространством, если для всех его элементов определена такая числовая функция *ρ(x,y)* двух аргументов, что для любых $x, y, z \in X$ выполняются три аксиомы:

I. $\rho(x,y) \ge 0$, причем $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

II. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);

III. $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называют также точками, функцию *ρ(x,y)* – метрикой, или расстоянием, между точками x и y.

Иногда будем помечать метрику индексом X, т.е. $\rho_X(x,y)$, чтобы указать, о каком именно пространстве точек идет речь. На одном и том же множестве X могут быть заданы разные метрики. Перечисленные аксиомы I–III согласуются с обыденным представлением о свойствах расстояния. Аксиома III имеет существенное значение, когда точки x, y, z попарно различны, в противном случае она следует из двух предыдущих аксиом.

Утверждение. Пусть ρ(x,y) – некоторая метрика в пространстве X. Доказать, что функции

$$\tilde{\rho}(x,y) = \ln(1+\rho(x,y)), \quad \hat{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

тоже задают метрики в этом пространстве.

Определение 2. Пусть X – метрическое пространство. Шаром с центром в точке $x \in X$ и радиусом $r \in R$ называется множество $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$.

Множество $\Omega \subset X$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

3. Примеры метрических пространств

1. Пространство изолированных точек с дискретной метрикой.

Рассмотрим, произвольное множество X. Определим в нем расстояние между точками следующим образом:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ne y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Расстояние между различными элементами принимается равным единице, независимо от природы этих элементов и от их геометрической интерпретации. Тем не менее, такое расстояние удовлетворяет аксиомам метрики, это нетрудно проверить:

I. $\rho(x,y) \ge 0$, причем $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

II. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

III. $\underbrace{\rho(x,y)}_{=1} \le \underbrace{\rho(x,z)+\rho(z,y)}_{=2}$ для различных x, y, z.

Это пример самой примитивной метрики, реагирующей только на отличие точек друг от друга.

2. Пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Расстояние между числами x и $y \in \mathbb{R}$ вычисляется по формуле

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

Аксиомы метрики соответствуют элементарным свойствам модуля вещественных чисел:

I. $|x-y| \ge 0$, причем $|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$;

II. $|x-y| = |y-x|$;

III. $|x-y| \le |x-z|+|z-y|$.

Шар с центром в точке x и радиусом r представляет собой интервал длины 2r:

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R} : |x-y| < r \} = (x-r; x+r).$$

3. Пространство n-мерных числовых векторов R^n.

В этом пространстве могут быть заданы разные метрики. Приведем три основные:

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|;$$

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2};$$

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k|.$$

Исследуем свойства этих метрик на примере пространства $\mathbb{R}^2$. Выясним, как вычисляется расстояние между точками и как выглядит единичный шар с центром в нуле.

Пусть x=(2,3), y=(10,7).

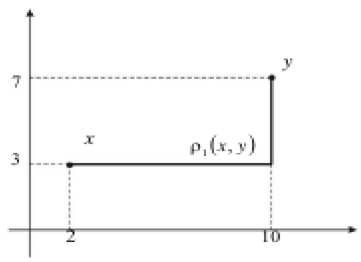

Рис.1

Из (рис. 1) видно, что метрика ρ_1 вычисляется следующим образом:

$\rho_1(x,y)=|2-10|+|3-7|=12$.

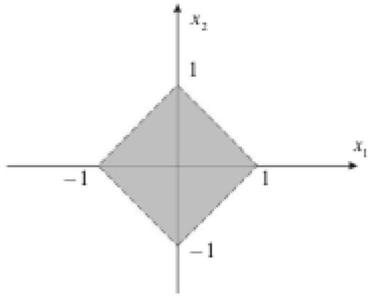

Рис.2

Шар в метрике ρ_1 изображен на рис.2.

$$B_1(0)=\{x=(x_1,x_2):|x_1|+|x_2|<1\}.$$

В метрике ρ_2:

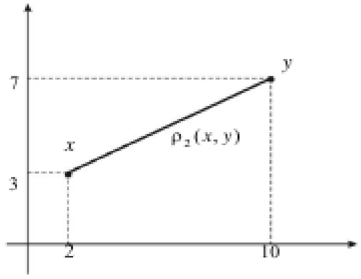

Рис.3

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{(2-10)^2+(3-7)^2}=4\sqrt{5}$$

(рис.3).

Шар, рис.4

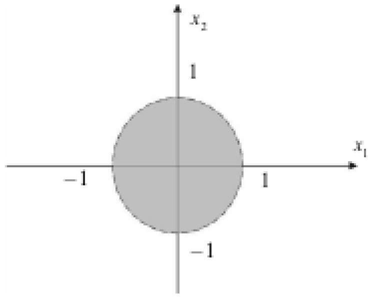

Рис.4

В метрике ρ_∞:

$$\rho_\infty(x,y)=\max\{|2-10|,|3-7|\}=8$$

(рис.5);

$$B_1(0)=\{x=(x_1,x_2):\max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$$

(рис.6).

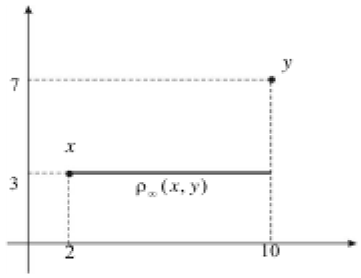

Рис.5

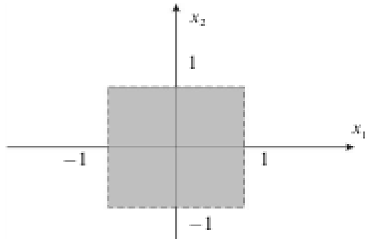

Рис.6

По рисункам 1, 3, 5 видно, что метрика ρ_1 вычисляет длину пути из точки x в точку y, если двигаться параллельно координатным осям. Таким образом, задают метрику в городе с прямоугольным расположением улиц, иногда называют манхэттенским расстоянием. Метрика ρ_∞ определяет наибольшее отклонение между координатами векторов x и y. Метрика ρ_2 вычисляет длину отрезка, соединяющего точки x и y. Это привычный способ измерения расстояния в евклидовой геометрии, поэтому метрику ρ_2 называют евклидовой.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей ℓ^p.

Для конечного p расстояние определено формулой

$$\rho_{\ell^p}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{\ell^1}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k-y_k\right|;$$

$$\rho_{\ell^2}(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k-y_k\right)^2}.$$

Метрика пространства ℓ^∞ получается из метрики пространства ℓ^p при $p\to\infty$:

$$\rho_{\ell^\infty}=\sup_{1\le k<\infty}|x_k-y_k|.$$

5. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k[a;b]$.

Расстояние определено формулой

$$\rho_{C^k}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{k}\max_{t\in[a;b]}\left|x^{(\ell)}(t)-y^{(\ell)}(t)\right|.$$

При k=0 получаем метрику в пространстве непрерывных функций:

$$\rho_C(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|.$$

Такая метрика еще называется равномерной. Графическая реализация этой метрики изображена на рисунке 7. Расстояние между непрерывными функциями определяется как наибольшее отклонение между их графиками.

Проверим выполнение аксиом I-III для равномерной метрики:

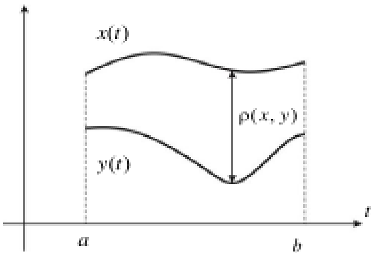

Рис.7

I. $\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|\ge 0$ – очевидно;

$\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|=0\Leftrightarrow x=y$ – проверка устно;

II.

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|=\max_{t\in[a;b]}\left|y(t)-x(t)\right|=$$
$$=\rho(y,x)$$

– очевидно благодаря свойствам модуля;

III. $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ – вытекает из неравенства треугольника для модуля и свойства максимума:

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|=$$
$$=\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)\right|\le$$
$$\le\max_{t\in[a;b]}\left(\left|x(t)-z(t)\right|+\left|z(t)-y(t)\right|\right)\le$$
$$\le\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-z(t)\right|+\max_{t\in[a;b]}\left|z(t)-y(t)\right|=$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Аксиомы метрики выполнены.

Исследуем, как в равномерной метрике выглядит шар радиуса r, центром которого является функция x:

$$B_r(x)=\left\{y\in C[a;b]:\max_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|<r\right\}=$$
$$=\left\{\begin{matrix}y\in C[a;b]:x(t)-r<y(t)<x(t)+r\\ \forall t\in[a;b]\end{matrix}\right\}.$$

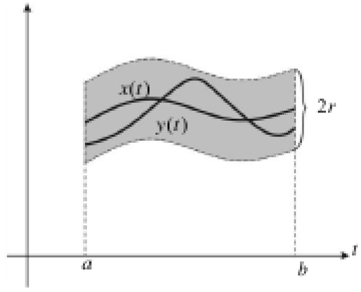

Рис.8

Отсюда видно, что шар $B_r(x)$ представляет собой множество функций y(t), графики которых лежат в полосе ширины 2r, располагающейся вдоль графика функции x(t) (рис.8).

6. Пространства Лебега $L^p(a;b)$.

Для конечного *p*, расстояние вычисляется по формуле

$$\rho_{L^p}(x,y)=\left(\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{L^1}(x,y)=\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|dt.$$

$$\rho_{L^2}(x,y)=\sqrt{\int_a^b(x(t)-y(t))^2dt}.$$

Надо заметить, что пространство $L^\infty(a;b)$ также является метрическим.

Справедливы следующие **утверждения:**

1. Функция $\rho(x,y)=\min_{1\le k\le n}\left|x_k-y_k\right|$ не является метрикой в пространстве R^n.

2. Функция $\rho(x,y)=\inf_{1\le k<\infty}\left|x_k-y_k\right|$ не является метрикой в пространстве ℓ^∞.

3. Функция $\rho(x,y)=\min_{t\in[a;b]}\left|x(t)-y(t)\right|$ не является метрикой в пространстве C[a;b].

4. Функция $\rho(x,y) = \int\limits_a^b (x(t) - y(t))^2\,dt$

не является метрикой в пространстве $L^2(a;b)$.

4. Исследование функций на принадлежность определенным пространствам. Вычисление метрики

Пример 4.1. Определить аналитическим способом (без построения графика), принадлежит ли функция x=x(t) пространствам непрерывных функций C[a,b], C[c,d].

Решение.

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln t},\ t \in (0,1) \\ 0,\ t = 0, \quad [a,b] = [-2,2]; [c,d] = [1,3]. \\ \dfrac{\sin t^2}{t},\ \notin [0,1) \end{cases}$$

Используем определение пространства непрерывных функций C[a,b]:

$x \in C[a,b] \Leftrightarrow$ x(t) определена в каждой точек отрезка [a,b],

$\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x(t_0)$ для любых точек

$t_0 \in (a,b),\ \lim\limits_{t\to a+0} x(t) = x(a),\ \lim\limits_{t\to b-0} x(t) = x(b).$

Заметим, что функция x(t), определена во всех точках числовой прямой. К тому же это кусочно-заданная функция, причем две ее основные компоненты $\dfrac{1}{\ln t}$ и $\dfrac{\sin t^2}{t}$ непрерывны на своих промежутках задания. Поэтому x(t) может иметь разрывы только в точках t=0, t=1.

Исследуем предельное поведение функции x(t) в точке t=0:

$$\lim_{t\to 0-0} x(t) = \lim_{t\to 0-0} \frac{\sin t^2}{t} = 0;$$

$$\lim_{t\to 0+0} x(t) = \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{\ln t} = 0; \quad x(0) = 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0+0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0-0} x(t) = x(0),$ то функция x(t) непрерывна в точке t=0.

Исследуем предельное поведение функции x(t) в точке t=1:

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{\ln t} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to 1+0} x(t) = \lim_{t\to 1+0} \frac{\sin t^2}{t} = \sin 1;$$

$$x(1) = \sin 1.$$

Поскольку левосторонний предел бесконечный, то функция x(t) имеет разрыв в точке t=1. Значит, $x \notin C[-2,2]$. Однако, правосторонний предел в точке t=1 конечный и совпадает со значением функции в этой точке. Поэтому функция x(t) непрерывна на отрезке [1,3]. Отсюда, $x \in C[1,3]$.

Пример 4.2. Определить, принадлежит ли функция x=x(t) пространствам $x \in C[-1,1]$, $C^1[-1,1]$, $C^2[-1,1]$.

Решение. $x(t) = \sqrt[3]{t}$.

Имеем пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций. Очевидно, функция $x(t) = \sqrt[3]{t}$ непрерывна на всей числовой прямой и, в частности, на отрезке[-1,1]. Значит, $x \in C[-1,1]$.

Производная этой функции $x'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ имеет разрыв в точке t=0, значит, функция x не является непрерывно дифференцируемой на отрезке [-1,1]. Отсюда $x \notin C'[-1,1]$.

Поскольку $C^2[-1,1] \subset C^1[-1,1]$, то $x \notin C^2[-1,1]$.

Пример 4.3. Проверить, принадлежит ли функция *x=x(t)* пространству $L^1(a,b)$. На основании этого сделать вывод, может ли функция x принадлежать пространству $L^2(a,b)$.

Решение.

$$x(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t+1}}, \quad (a,b) = (-1,1)$$

Здесь имеем пространства Лебега. Проверим, принадлежит ли функция x пространству $L^1(-1,1)$:

$$\int_{-1}^{1} |\,x(t)\,|\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t+3}{\sqrt{t+1}}dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1}dt + \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{\sqrt{t+1}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}\,\Big|_{-1}^{1} + 4\sqrt{t+1}\,\Big|_{-1}^{1} = \frac{16\sqrt{2}}{3} < \infty.$$

Таким образом, $x \in L^1(-1,1)$, а поскольку $L^2(-1,1) \subset L^1(-1,1)$, то функция x может принадлежать пространству $L^2(-1,1)$.

Пример 4.4. Определить, каким из перечисленных пространств, принадлежит функция *x=x(t)*:

$$C[0,1],\ L^1(0,1),\ L^2(0,1),\ L^\infty(0,1),\ L^1(1,+\infty),$$
$$L^2(1,+\infty),\ L^\infty(1,+\infty).$$

Решение. $x(t) = \dfrac{1}{t}$.

Функция *x(t)* не определена в точке *t*=0, поэтому $x \notin C[0,1]$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке (0,1):

$$\int_0^1 |x(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t} = +\infty \Rightarrow x \notin L^1(0,1);$$

Поскольку $L^1(0,1) \supset L^2(0,1) \supset L^\infty(0,1)$,

то $x \notin L^2(0,1), x \notin L^\infty(0,1)$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке (1,+∞):

$$\int_1^{+\infty} |x(t)|\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty \Rightarrow x \notin L^1(1,+\infty);$$

$$\int_1^{+\infty} x^2(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = +\infty \Rightarrow x \in L^2(1,+\infty);$$

При t > 1 функция *x(t)* ограничена: |*x(t)*| < 1. Поэтому $x \in L^\infty(1,+\infty)$.

Пример 4.5. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность *x* пространствам $l^1.l^2,l^3.l^4,l^\infty$.

Решение. Пусть $x = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Просуммируем члены последовательности, получаем расходящийся гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \quad \Rightarrow \quad x \notin l^1.$$

Просуммируем члены последовательности с квадратами, получим сходящийся ряд из обратных квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty \quad \Rightarrow \quad x \in l^2.$$

Поскольку $l^2 \subset l^3 \subset l^4 \subset l^\infty$, то $x \in l^3, l^4, l^\infty$.

Решение. Пусть x=(1,2,3,4,…,99,0,0,0,…)

Отметим сразу, что последовательность *x* ограничена:

$$|x_k| \le 99, \quad k = 1,2,3,\ldots \quad \Rightarrow \quad x \in l^\infty.$$

Последовательность *x* содержит лишь конечное число ненулевых членов, поэтому при любом натуральном показателе *p* имеем сумму конечного числа слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p = \sum_{k=1}^{99}k^p < \infty \quad \Rightarrow \quad x \in l^p.$$

Таким образом, последовательность *x* принадлежит всем указанным в задаче пространствам.

Решение. Пусть

$$x = \left(\frac{2}{1}, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \ldots\right)$$

Определим общий член последовательности:

$$x_k = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Просуммируем члены последовательности с произвольным показателем *p*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \infty.$$

Ряд расходится, потому что не выполнен необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1 \ne 0.$$

Однако последовательность *x* ограничена:

$$|x_n| \le 2, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Таким образом, $x \notin l^1, l^2, l^3, l^3$, но $x \in l^\infty$.

Пример 4.6. Указать наименьшее целое число *p*, при котором бесконечная числовая последовательность *x* принадлежит пространству l^p.

Решение.

$$x = \left\{\frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

Заметим, что данная последовательность знакоположительная, поэтому опускаем модуль:

$$x \in l^p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}x_k^p < \infty.$$

Сходимость знакоположительного ряда устойчива относительно замены общего члена ряда на эквивалентное выражение:

$$x_k^p = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}}\right)^p \sim \frac{1}{k^{2p/5}} \text{ при } k \to \infty.$$

Используем условие сходимости обобщенного гармонического ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p/5}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2p}{5} > 1.$$

Значит, $x \in l^p$ при любом, $p > \frac{5}{2}$. Таким образом, *p=3* – это наименьшее целое число *p*, при котором последовательность *x* принадлежит пространству l^p.

Пример 4.7. Найти расстояние между функциями *x=x(t)* и *y=y(t)* в пространстве C[a,b].

Решение. Пусть x(t)=t, y(t)=2cost, C[0,2π].

$$\rho_{C[0,2\pi]}(x,y) = \max_{t\in[0,2\pi]} |\,x(t) - y(t)\,| =$$
$$= \max_{t\in[0,2\pi]} |\,t - 2\cos t.|$$

Найдем наибольшее абсолютное значение функции φ(t)= t-2cost на отрезке [0,2π]. Как известно, наибольшее значение непрерывной функции следует искать среди ее значений на концах отрезка и локальных экстремумов внутри отрезка. Вычисляем φ'(t)=1+2sint. Из условия φ'(t)=0, t∈ [0,2π], находим точки, в которых могут быть локальные экстремумы:

$$t_1 = \frac{7\pi}{6},\, t_2 = \frac{11\pi}{6}.$$

Сравним абсолютные значения функции φ в точках t_1, t_2 и на концах отрезка:

$$\left|\varphi(t_1)\right| = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 5,4;$$
$$\left|\varphi(t_2)\right| = \frac{11\pi}{6} - \sqrt{3} \approx 4;$$
$$\left|\varphi(0)\right| = 2;$$
$$\left|\varphi(2\pi)\right| = 2\pi - 2 \approx 4,3.$$

Выбираем среди этих значений наибольшее и получаем расстояние между функциями x и y в пространстве C[0,2π]:

$$\rho_{C[0,2\pi]}(x,y) = \frac{7\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 5,4.$$

Заключение

Метрические пространства – важное понятие в математике, которое играет значимую роль в анализе, топологии, теории вероятностей и других дисциплинах. Они представляют собой абстрактные математические структуры, в которых можно измерять расстояния между элементами множества. Изложенная теория метрических пространств позволяет проводить дальнейшие исследования, а именно:

1. Разработка новых методов интегрирования. Современные математики продолжают исследовать различные методы интегрирования на метрических пространствах, что важно в прикладных областях, таких как обработка сигналов и машинное обучение.

2. Применение в анализе данных. Меры и интегралы на метрических пространствах позволяют оценивать распределения, моменты и другие

.

статистические характеристики данных, что полезно при анализе больших объёмов информации.

3. Использование в машинном обучении. Анализ данных в различных пространствах, включая метрические, позволяет разрабатывать более точные и эффективные алгоритмы машинного обучения.

4. Применение в физике и инженерии. Меры и интегралы на метрических пространствах находят применение в физике и инженерии, особенно в задачах моделирования и анализа систем.

Таким образом, метрические пространства остаются активной областью исследований и имеют потенциал для дальнейшего развития и расширения их применения. Понимание и владение этой темой позволяют углубить знание математики и использовать её в решении разнообразных задач в науке и технике.

Литература

1. Лебедев, В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика: учеб. пособие. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 296с.

2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.

3. Треногин, В. А. Функциональный анализ: учебник. – 4-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.

4. Фёдоров, В. М. Курс функционального анализа. – СПб.: Лань, 2005. – 352 с.

5. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 3 т. Т. 1-2. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 424 с.

6. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 584 с.

7. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения (введение в теорию). – М.: Ком-Книга, 2010. – 304 с.

8. Волков, В. Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: курс лекций: учеб. пособие / В. Т. Волков, А. Г. Ягола. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во КДУ, 2009. – 140 с.

9. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.

10. Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.

Добровольский Ю.Н. Метрика – как одна из важнейших структур абстрактной математики. *Дано определение метрики, описаны свойства основных классических функциональных пространств с заданной метрикой, приведены примеры метрических пространств; показано, как вычислять расстояние и как выглядит шар в пространстве* $\mathbb{R}^2, C^k[a;b]$ *при различных заданиях метрики. Исследование функций на принадлежность определенным пространствам. Вычисление метрики.*

Ключевые слова: *метрическое пространство, метрика, непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, числовые последовательности. Интеграл Лебега, условие почти всюду, существенно ограниченные функции.*

Dobrovolsky Yu.N. Metric - as one of the most important structures of abstract mathematics. *A metric definition is given, the properties of the main classical functional spaces with a given metric are described, examples of metric spaces are given; shows how to calculate the distance and how the ball looks in space under various metric tasks. Investigation of functions for belonging to certain spaces. Metric computation.*

Keywords: *metric space, metric, continuous functions, piecewise continuous functions, numerical sequences. Lebesgue integral, condition almost everywhere, essentially bounded functions.*

Статья поступила в редакцию 28.06.2025
Рекомендована к публикации профессором Павлышом В. Н.